XVII Лаврентьевские чтения, посвященные 75-летию со дня рождения академика В.П. Ларионова
Олимпиада по математике
15 апреля 2013 г.

1. Дан многочлен с целыми коэффициентами $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$. Известно, что $P(0)$ и $P(2013)$ — нечетные числа. Есть ли у этого многочлена целочисленные корни?

2. Пусть $[x]$ — наибольшее целое число, не превышающее x и $\{x\} = x - [x]$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \{(45 + \sqrt{2013})^n\}$.

3. Дана матрица A размером 3×2 и матрица B размером 2×3. Известно, что

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу BA.

4. Планета имеет форму тела, полученного вращением квадрата со стороной вокруг одной из диагоналей. Путешествие по планете считается кругосветным, если его маршрут — замкнутая кривая, симметричная относительно ее центра. Найдите длину кратчайшего маршрута кругосветного путешествия.

5. Найдите все функции $f(x)$ определенные на $(0, \infty)$ такие, что $f(x)$ дважды дифференцируема, $f'(x) > 0$ и $f(f'(x)) = -f(x)$.

6. Исследовать на дифференцируемость функцию

$$f(x,y) = 1 + \sqrt{(x-2013)^2 + (y-75)^2} + e^{\sqrt{(x-2013)^2+(y-75)^2}}.$$

7. Пусть даны не равные нулю действительные числа x, y и z такие, что $x + y + z = 0$. Найдите максимальное значение функции

$$f(x,y,z) = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}.$$