XVI Лаврентьевские чтения
Олимпиада по математике
16 апреля 2012 г.

1. Вася написал на доске в ряд в порядке неубывания все правильные дроби со знаменателями, не большими 2012. Могут ли две соседние дроби иметь одинаковые знаменатели?

2. Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$, где n — натуральное число?

3. Пусть α, β, γ корни многочлена $x^3+px+q=0$. Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

4. В тетраэдре $OABC$ все плоские углы при вершине O прямые, $OA = 2$, $OB = 3$, $OC = 5$. Найдите сумму плоских углов при вершине C.

5. Пусть вокруг параболы описан треугольник ABC (т.е. парабола касается прямых AB, BC, CA). Докажите, что фокус этой параболы лежит на описанной окружности треугольника ABC.

В случае параболы $y^2 = 2px$, $p > 0$ фокус находится в точке $(p/2, 0)$, уравнение директрисы $x = -p/2$, при этом по определению расстояния от точек параболы до фокуса и директрисы равны.

6. Пусть $f : [1,\infty) \to (0,\infty)$ — строго убывающая функция такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(2^{n+1})}{f(2^n)} < \frac{1}{2}.$$

Докажите, что

$$\int\limits_1^\infty f(x)\,dx < \infty.$$

7. Про положительные числа a, b и c известно, что

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1.$$

Докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{bc}} \cdot \frac{1}{a+1} + \frac{b}{\sqrt{ca}} \cdot \frac{1}{b+1} + \frac{c}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{c+1} < \sqrt{2}.$$