

**XV Лаврентьевские чтения, посвященные  
300-летию со дня рождения М.В. Ломоносова  
Олимпиада по математике  
11 апреля 2011 г.**

1. Докажите, что

$$\sqrt{33 - 16\sqrt{3} \cos 10^\circ} = 1 + 8 \cos 80^\circ.$$

2. В треугольнике  $ABC$  точка  $D$  лежит на  $AC$ , при этом  $AB = 1$ ,  $DC = 1$ ,  $\angle ABD = 90^\circ$ ,  $\angle DBC = 30^\circ$ . Найдите длину  $AD$ .

3. Существует ли многочлен  $P(x)$  с вещественными коэффициентами, такой что

$$a) P\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k+1}, \quad b) P\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k+2}{k}$$

для всех положительных целых  $k$ ?

4. Дана конечная система конечных множеств такая, что всякие 2 элемента принадлежат одновременно не более, чем двум множествам. Докажите, что если любые не более, чем 10 элементов покрываются объединением некоторых двух множеств, то все элементы покрываются объединением некоторых двух множеств.

5. Дана бесконечная строго возрастающая числовая последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  с положительными членами такая, что среднее арифметическое любых четырех последовательных членов  $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$  принадлежит этой же последовательности. Докажите, что последовательность  $a_{n+1}/a_n$  сходится и найдите этот предел.

6. Вычислите сумму

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{nm(n+m+1)}.$$

7. Докажите, что из четырех центров вневписанных сфер тетраэдра либо хотя бы один лежит вне описанной сферы и хотя бы один внутри, либо все 4 лежат на описанной сфере.