XIV Лаврентьевские чтения, посвященные 110-летию академика М.М. Лаврентьева
Олимпиада по математике
12 апреля 2010 г.

1. Три натуральных взаимно простых в совокупности числа и больших 100 таковы, что квадрат разности любых двух из них делится на третье и любое из них меньше произведения остальных. Докажите, что эти числа — квадраты натуральных чисел.

2. Дан треугольник ABC. Последовательность C_n определена следующим образом: $C_1 = C$, C_{n+1} — центр вписанной окружности в треугольник ABC_n. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$.

3. Все грани тетраэдра $ABCD$ — остроугольные треугольники. В гранях ABC и ABD провели высоты AK и AL соответственно. Оказалось, что точки C, K, L и D лежат на одной окружности. Докажите, что $AB \perp CD$.

4. Найдите все комплексные корни многочлена

$$p(x) = \sum_{n=1}^{2010} (1005 - |1005 - n|)x^n.$$

5. Про положительные числа x, y и z известно, что $x + y^2 + z^3 = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{2+xy} + \frac{y}{2+yz} + \frac{z}{2+zx} > \frac{1}{2}.$$

6. Функция $\varphi(x) \in C^1(0, +\infty)$, причем

$$\int\limits_0^1 \varphi(\alpha x)\,dx = 2\varphi(\alpha), \quad \varphi(1) = 81.$$

Найдите $\varphi(9)$.

7. Дан выпуклый многоугольник периметра $6\sqrt{3} + \pi$. Нашлась пара его точек, делящих периметр пополам, расстояние между которыми равно 6. Докажите, что найдется пара точек, делящих периметр пополам, расстояние между которыми не превосходит 3.