МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

VI Всероссийская олимпиада студентов образовательных организаций высшего образования (Всероссийской студенческой олимпиады) в 2020-2021 учебном году 26 апреля 2021 г.

составители:

А.С. Голованов, А.Д. Больбот,

С.В. Попов, А.Ю. Чеботарев

Якутск
26.04.2021 г.

ЗАДАЧИ

1. Функция $f(x)$ определенная при всех действительных x, удовлетворяет равенствам $f(x) = f(x+T_1)$ при всех $x > A_1$ и $f(x) = f(x+T_2)$ при всех $x > A_2$, где T_1, T_2 — данные положительные числа, A_1, A_2 — данные действительные числа. Докажите, что $f(x) = f(x+T_2)$ при всех $x > A_1$.

2. Назовём натуральное число *почти совершенным*, если сумма всех его делителей, включая 1, но не включая само число, на 1 меньше этого числа. Найдите все почти совершенные числа, некоторая точная степень которых тоже почти совершенна.

3. Найдите максимальное значение интеграла $\int\limits_0^1 f^3(x)\,dx$, если выполнены условия

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0, \quad |f(x)| \leqslant 1 \quad \forall x \in [0,1].$$

4. В гармоническом ряде вычеркнули все слагаемые, знаменатель которых содержит девятку в десятичной записи. Сходится или нет полученный ряд?

5. Докажите, что при каждом натуральном n число решений уравнения $x+2y+2z+3w=n$ в целых неотрицательных числах равно числу решений в целых неотрицательных числах уравнения $a+b+c+d=n$, в которых $a \geqslant b \geqslant d$ и $a \geqslant c \geqslant d$.

6. Вычислите интеграл $\oint\limits_\Gamma \dfrac{z+i\ln 3-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg} z+\frac{5i}{4}}\,dz$, где Γ — окружность $|z-2|=3$, пробегаемая против часовой стрелки.

7. По кругу даны набор из n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Каждую минуту с этими числами последовательно проделывают n операций, k-я из которых состоит в замене k-го числа в наборе на среднее арифметическое всех чисел в наборе. (Последовательное изменение операций означает, что первая операция изменяет первое число, и во второй операции участвует уже новое число, и т.д.). Докажите, что если операции проводить неограниченно долго, то каждое число в наборе будет стремиться к некоторому пределу, и найдите эти пределы.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Пусть $x > A_1$. Найдем натуральное число n такое, что $x + nT_1 > A_2$. По условию $f(x) = f(x+nT_1) = f(x+nT_1+T_2) = f(x+T_2)$, что и требовалось доказать.

2. Ответ: все степени двойки.

Пусть n — совершенное число. Тогда, по условию, сумма его делителей $d_1 + d_2 + \ldots + d_l$, отличных от n, равна $n-1$. У числа n^k заведомо есть делители $d_1, d_1 n, \ldots, d_1 n^{k-1}$, $d_2, d_2 n, \ldots, d_2 n^{k-1}, \ldots, d_l, d_l n, \ldots, d_l n^{k-1}$. Все они различны и отличны от n^k, их сумма равна

$$(1+n+n^2+\ldots+n^{k-1})(d_1+d_2+\ldots+d_l) = (1+n+n^2+\ldots+n^{k-1})(n-1) = n^k - 1.$$

Следовательно, у числа n^k нет делителей, отличных от вышеприведенных. Это означает, что n — степень простого числа. В противном случае, если n делится на p^r (и не делится на p^{r+1}), то в приведенном выше списке делителей числа n^k отсутствует делитель p^{r+1}, чего быть не может.

Итак, $n = p^m$. Тогда

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^{m-1} = \frac{p^m - 1}{p-1},$$

отсюда $p = 2$. Таким образом, условию задачи удовлетворяют числа $n = 2^m$ и только они.

3. Ответ: $\frac{1}{4}$.

Справедливо неравенство $\int\limits_0^1 (f(x)-1)(f(x)+\frac{1}{2})^2\,dx \leqslant 0$, поэтому $\int\limits_0^1 (f^3(x) - \frac{1}{4})\,dx \leqslant 0$ и значение интеграла $\int\limits_0^1 f^3(x)\,dx \leqslant \frac{1}{4}$. Пример достижения максимального значения $\frac{1}{4}$ дается, например, ступенчатой функцией $f(x) = -\frac{1}{2}$, $x \in (0, \frac{2}{3})$ и $f(x) = 1$, $x \in (\frac{2}{3}, 1)$. При этом, очевидно, $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$.

4. Ответ: ряд сходится.

Легко показать, что от 0 до $10^n - 1$ имеется ровно 9^n целых чисел без девятки. Поэтому полученный ряд мажорируется сходящимся рядом

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{88}\right) + \ldots < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9^n - 9^{n-1}}{10^{n-1}} = 80.$$

5. Легко видеть, что каждому решению (x, y, z, w) первого уравнения соответствует решение второго уравнения $a = \max\{y, z\} + w + x$, $b = w + y$, $c = w + z$, $d = \min\{y, z\}$. Это отображение является взаимно-однозначным: обратное отображение задается формулами $x = a - \max\{b, c\}$, $w = b + c - a - d + x$, $y = b - w$, $z = c - w$.

6. Ответ: $-\dfrac{32\pi^2 i}{9}$.

Изолированные особые точки подынтегральной функции находим из равенства

$$\operatorname{tg} z + \frac{5i}{4} = 0, \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{5}{4}, \quad z = -i \ln 3 + \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

При $k = 0$ числитель обращается в 0, значит внутри окружности Γ лежит простой полюс данной функции $z = -i \ln 3 + \frac{3}{2}\pi$ (Докажите!). Вычет подынтегральной функции в этой точке равен

$$\left.\frac{z + i\ln 3 - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\cos^2 z}}\right|_{z = -i\ln 3 + \frac{3}{2}\pi} = \pi \sin^2(i \ln 3) = -\frac{16\pi}{9}.$$

Отсюда, окончательный ответ: $-2\pi i \cdot \dfrac{16\pi}{9} = -\dfrac{32\pi^2 i}{9}$.

7. Ответ: все числа будут стремиться к одному пределу, равному

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2kx_k}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx_k}{1+2+\ldots+n}.$$

Пусть a_m и b_m – соответственно наименьшее и наибольшее из чисел после m проходов по кругу. Очевидно, последовательность a_m неубывающая (потому что среднее арифметическое нескольких чисел не может быть меньше наименьшего из них), а b_m невозрастающая. Обе эти последовательности ограничены, следовательно, они имеют пределы, которые мы обозначим a и b соответственно.

Тогда после m проходов по кругу наибольшее число равно b_m, а после $m+1$ прохода все числа будут не больше $\frac{a+(n-1)b_m}{n}$ (так как хотя бы одно из чисел не больше a, а остальные не больше b_m). Таким образом, $b_{m+1} \leqslant \frac{a+(n-1)b_m}{n}$, то есть $b_{m+1} - a \leqslant \frac{n-1}{n}(b_m - a)$. Отсюда следует, что последовательность (неотрицательных) чисел $b_m - a$ стремится к 0, иначе говоря, $a = b$. Следовательно, все числа стремятся к этому же пределу.

Другими словами, мы построили последовательность вложенных отрезков, на m-ом из которых лежат все числа после m минут, и длина которых стремится к нулю. Отсюда, в силу принципа вложенных отрезков следует, что все числа стремятся к одному и тому же пределу.

Этот предел обозначим через $f(x_1, \ldots, x_n)$ и пусть $a_k = f(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ — это предел для набора чисел, в котором k-е число равно 1, а остальные — 0. Тогда $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, поскольку результат любого конечного числа операций является линейной функцией от x_k, коэффициенты которой стремятся к $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Заметим, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ так как набор из n одинаковых чисел, очевидно, переходит в себя. И наконец, $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_2, \ldots, x_n, \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n})$ так как после применения одной операции предел не меняется. Из этих двух соотношений и формулы для f находим коэффициенты a_k.