

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова»  
(СВФУ им. М.К. Аммосова)


УДК 517.9

УТВЕРЖДАЮ  
Начальник управления –  
Проректор по науке и инновациям  
К.К. Кривошапкин  
«16» октября 2018 г.



ОТЧЕТ  
по научно – исследовательскому проекту  
«Вариационные методы в исследовании нелинейных задач о моделировании дефектов  
композитных конструкций»  
(годовой)

Соглашение № 24-НИП

Зав. УНЛ математических и компьютерных  
методов анализа ИМИ, к.ф.-м.н.,  Т.С. Попова

Якутск, 2018

1. Тема НИР: Вариационные методы в исследовании нелинейных задач о моделировании дефектов композитных конструкций

2. Научный руководитель НИР: Попова Татьяна Семеновна, кандидат физико – математических наук, без звания

Список исполнителей:

1. Хлуднев А.М., д.ф.-м.н., профессор, зав.лаб. ИГиЛ СО РАН;
2. Попова Т.С., к.ф.-м.н., зав.лаб. ИМИ СВФУ, доцент-исследователь;
3. Лазарев Н.П., д.ф.-м.н., вед.исследователь СВФУ;
4. Неустроева Н.В., к.ф.-м.н., доцент-исследователь ИМИ СВФУ;
5. Николаева Н.А., аспирант ИМИ СВФУ;
6. Семенова Л.Г., магистрант ИМИ СВФУ.

3. Подразделение вуза, в котором проводится НИР: Учебно – научная лаборатория математических и компьютерных методов анализа ИМИ

4. Основание для проведения НИР: Положение о порядке финансирования научно-исследовательских проектов СВФУ

5. Соответствие проводимых исследований:

- приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в Российской Федерации: \_\_\_\_\_;

- приоритетным направлениям модернизации и технологического развития экономики России: \_\_\_\_\_;

- критическим технологиям: Технологии предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера;

6. Основное научное направление вуза, по которому проводится НИР: Разработка, исследование корректности и численная реализация математических моделей природных и техногенных процессов Арктики и регионов Севера. Разработка математических методов, их применение в моделировании социально-экономических и экологических систем

7. Коды темы по рубрикатору ГРНТИ:

27.35.31 Математические модели упругости и пластичности,  
30.19.15 Теория упругости

8. Ключевые слова и словосочетания, характеризующие тематику НИР и ожидаемые результаты (продукцию): вариационное неравенство, граничные условия вида неравенств, условия непроникания, вязкоупругость, наследственные интегралы.

9. Сроки проведения: начало – 01.09.2017, окончание – 31.12.2019.

10. Плановый объём средств на проведение НИР: 600 000-00 руб. (суммарно из календарного плана)

11. Отчет состоит из введения, 2 разделов, заключения, приложений, содержит ссылки на 20 использованных источников.

12. Ключевые слова: вариационное неравенство, нелинейная краевая задача, условия непроникания, односторонние граничные условия, трещина, тонкое включение, задачи о сопряжении, оптимальное управление.

## Цели проведения НИР.

Проект направлен:

- на обоснование корректности новых математических моделей деформирования упругих и вязкоупругих тел, имеющих неоднородности в виде трещин и включений, а также состоящих из материалов различной реологии.

## Содержание НИР:

В ходе выполнения НИР исследованы и получены результаты по следующим вопросам: корректная постановка краевых задач о деформировании упругих и вязкоупругих тел с дефектами в виде включений и трещин; формулировка эквивалентных постановок в виде вариационных неравенств и уравнений с пояснениями о характере эквивалентности в рамках терминов соболевских пространств; доказательство теорем существования и единственности решений поставленных задач; обоснование предельных переходов по параметрам жесткости.

## Выполнение основных требований к проведению НИР.

### I. Требования к выполняемым работам.

Исследования проводились с использованием современных методов исследования нелинейных задач с условиями типа неравенств на границе, методов функционального анализа, вариационного исчисления.

### II. Требования к разрабатываемой документации:

По результатам проведенной НИР представлены следующие виды документации: научный отчет о выполненной НИР за период 01.09.2017-31.08.2018, содержащий результаты исследований, описание методов, ссылки на российские и зарубежные исследования в соответствующей области, перечень подготовленных к публикации статей и тезисов докладов на конференциях и семинарах; копии первых страниц опубликованных научных статей с официальных сайтов изданий, подтверждение принятия статьи к публикации, подтверждение получения статьи научным журналом; копии тезисов докладов на конференциях.

### III. Требования к кадровому обеспечению выполнения НИР.

Для выполнения НИР привлечены: зав.лабораторией гидроаэроупругости Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН д.ф.-м.н., профессор Хлуднев А.М., являющийся ведущим исследователем мирового уровня, руководителем научной школы в соответствующей области, имеющий публикации в ведущих в своей области российских и международных научных журналах; квалифицированные исследователи, имеющие опыт научной работы и публикации в российских и международных научных журналах; 1 аспирант и 1 магистрант.

#### IV. Требования к техническому обеспечению выполнения НИР.

Исследования носят преимущественно фундаментальный характер, специального оборудования не требуется.

Актуальность темы. Изучение поведения тел, имеющих те или иные неоднородности, находящихся под воздействием внешних нагрузок, является перспективным современным направлением развития математического моделирования процессов деформирования различных инженерных конструкций. К ним относятся как примеры нарушения целостности объекта (трещины, дефекты, технологические разрезы), так и композиционные особенности материала (включения различного характера). Для учета влияния этих неоднородностей на последствия нагружения конструкции необходимо принимать во внимание возникающее взаимодействие контактирующих при этом тел и поверхностей. Например, контакт берегов трещины, поверхности включения с материалом матрицы композита и другие случаи. С математической точки зрения это означает требование корректности описания условий, накладываемых на решения краевых задач теории упругости в зоне возможного контакта.

Новизна темы. Рассмотрены задачи о равновесии двумерных упругих и вязкоупругих тел, содержащих неоднородности различного характера, такие, как трещины, объемные и тонкие включения, круглый вырез, а также упругие и жесткие включения. Рассматривается задача о тонком упругом включении, которое отслаивается от упругой матрицы, образуя трещину. Таким образом, постановка задачи рассматривается в области с разрезом и круглым вырезом, в полости выреза находится жесткое препятствие. Включение моделируется как балка Бернулли-Эйлера, расположенная на одном из берегов трещины. На краях выреза и на берегах разреза заданы неклассические граничные условия в виде неравенств, исключающие проникание точек противоположных берегов трещины, а также точек тела и жесткого препятствия. Приведена дифференциальная и вариационная постановка задачи, обоснована ее однозначная разрешимость, а также доказана эквивалентность указанных постановок при условии достаточной гладкости решений. Далее, для поставленной задачи обоснован предельный переход по параметру, характеризующему жесткость материала включения. Показано, что предельной является задача о тонком жестком включении, рассмотренная во второй главе работы. Для исследования подобных задач широко используются методы вариационных неравенств [1,2,3], при выводе условий непроникания используются формулы теории упругости [4], при исследовании также используются методы функционального анализа и соболевских пространств [5,6,9]. В работах Хлуднева А.М. разработан общий подход к исследованию

данного класса задач [15-20]. Различные случаи задач с трещинами и тонкими включениями, в том числе жесткими, исследованы в работах Лазарева Н.П., Поповой Т.С., Неустроевой Н.В., Рудого Е.М. [7-8,10-14]. Изучению задач о сопряжении различных типов включений и предельный переход по параметру посвящены работы [17,20].

Результаты НИР за отчетный период:

1. Исследована задача равновесия вязкоупругого тела с объемным упругим включением без отслоения: доказана однозначная разрешимость, обоснована эквивалентность дифференциальной формулировки и формулировки в виде уравнения, обоснован предельный переход от объемного жесткого включения к тонкому жесткому включению. Задача о равновесии вязкоупругого тела с отслоившимся упругим включением, не выходящим на внешнюю границу: доказательство однозначной разрешимости, вывод полной системы краевых условий, обоснование эквивалентности дифференциальной формулировки и вариационного неравенства, получение в предельном случае задачи о жестком включении, получение дополнительных свойств решений. Исследованы задачи о равновесии для вязкоупругого тела с тонким упругим включением. Доказательство существования и единственности решения задачи о вязкоупругом теле, содержащем тонкое включение Бернулли – Эйлера без отслоения. Доказательство существования и единственности решения задачи о вязкоупругом теле, содержащем отслоившееся тонкое включение Бернулли – Эйлера; вариационная формулировка, доказательство эквивалентности дифференциальной и вариационной постановок. Обоснование предельного перехода в задаче о тонком включении Бернулли – Эйлера в вязкоупругом теле по параметру жесткости; вывод полной системы краевых условий.

2. Исследование задачи о двумерном упругом теле с круглым вырезом, трещиной и тонким включением; на берегах трещины заданы краевые условия типа неравенств; доказано существование и единственность решения, вывод полной системы краевых условий. Доказана теорема существования, а также выведена полная система краевых условий.

Результаты работы опубликованы в 7 научных статьях, а также тезисах VIII международной конференции по математическому моделированию, 2017 (Якутск), XXV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов"(2018, Москва), а также апробированы в XXIV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов"(2017, Москва).

## **Заключение**

1. Исследована задача равновесия вязкоупругого тела с объемным упругим включением без отслоения: доказана однозначная разрешимость, обоснована эквивалентность дифференциальной формулировки и формулировки в виде уравнения, обоснован предельный переход от объемного жесткого включения к тонкому жесткому включению. Задача о равновесии вязкоупругого тела с отслоившимся упругим включением, не выходящим на внешнюю границу: доказательство однозначной разрешимости, вывод полной системы краевых условий, обоснование эквивалентности дифференциальной формулировки и вариационного неравенства, получение в предельном случае задачи о жестком включении, получение дополнительных свойств решений. Исследованы задачи о равновесии для вязкоупругого тела с тонким упругим включением. Доказательство существования и единственности решения задачи о вязкоупругом теле, содержащем тонкое включение Бернулли – Эйлера без отслоения. Доказательство существования и единственности решения задачи о вязкоупругом теле, содержащем отслоившееся тонкое включение Бернулли – Эйлера; вариационная формулировка, доказательство эквивалентности дифференциальной и вариационной постановок. Обоснование предельного перехода в задаче о тонком включении Бернулли – Эйлера в вязкоупругом теле по параметру жесткости; вывод полной системы краевых условий.

2. Исследование задачи о двумерном упругом теле с круглым вырезом, трещиной и тонким включением; на берегах трещины заданы краевые условия типа неравенств; доказано существование и единственность решения, вывод полной системы краевых условий. Доказана теорема существования, а также выведена полная система краевых условий.

## **Список использованных источников**

1. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
2. Khludnev A. M., Kovtunenkov V. A. Analysis of Cracks in Solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
3. Popova T., Rogerson G. A. On the problem of a thin rigid inclusion embedded in a Maxwell material // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V.67:105. URL: <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0700-9>.
4. Попова Т. С. Задача о равновесии вязкоупругого тела с тонким жестким включением // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 1. С. 47–55.

5. Han J., Migorski S. A quasistatic viscoelastic frictional contact problem with multivalued normal compliance, unilateral constraint and material damage // *J. Math. Anal. Appl.* 2016. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.05.012>
6. Дюво Г., Лионс Ж. -Л. Неравенства в механике и физике. М.:Наука, 1980.
7. Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: Изд-во Московской государственной академии приборостроения и информатики, 1997.
8. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
9. Khludnev A. M. Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates // *Europ. J. Mech. A/Solids*. 2012. V. 32. P. 69–75.
10. Khludnev A. M., Leugering G. Optimal control of cracks in elastic bodies with thin rigid inclusion // *Z. Angew. Math. Mech.* 2011. V. 91, N 2. P. 125–137.
11. Rudoy E. M. Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body // *Z. Angew. Math. Phys.* 2015. V. 66, N 4. P. 1923–1937.
12. Рудой Е. М. Численное решение задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся тонким жестким включением // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2016. Т. 19, № 2. С. 74–87.
13. Rudoy E. M., Shcherbakov V. V. Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2016. V. 13. P. 395–410.
14. Khludnev A. M., Shcherbakov V. V. Singular invariant integrals for elastic bodies with thin elastic inclusions and cracks // *Dokl. Phys.* 2016. V. 61, N 12. P. 615–619.
15. Khludnev A. M., Leugering G. R. Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies // *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*. 2014. V. 2, N 1. P. 1–21.
16. Neustroeva N. V., Lazarev N. P. Differentiation of the energy functional in the equilibrium problem for a Timoshenko plate with a crack on the boundary of an elastic inclusion // *J. Applied and Industrial Mathematics*. 2017. V. 11, N 2. P. 252–262.
17. Хлуднев А. М., Попова Т. С. Об иерархии тонких включений в упругих телах // *Мат. заметки СВФУ*. 2016. Т. 23. № 1. С. 87–105.
18. Faella L., Khludnev A. M. Junction problem for elastic and rigid inclusions in elastic bodies // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2016. V. 39, N 12. P. 3381–3390.
19. Лионс Ж. -Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.:Мир, 1972.
20. Попова Т. С. Жесткое включение в задаче о вязкоупругом теле с трещиной // *Мат. заметки ЯГУ*. 2013. Т. 20. вып. 1. С. 73–92.

Выполнение планируемых показателей

№	Наименование показателя	1 этап			
		Ед. изм.	план	факт	примечание
1	Публикация научной статьи без дублирования с обязательным указанием СВФУ в изданиях, рецензируемых ВАК	Ед.	1	1	Хлуднев А.М., Попова Т.С. Задача сопряжения упругого включения Тимошенко и полужесткого включения // Мат. заметки СВФУ. 2018. Т.25, №1. С.73-89.
2	Публикация научной статьи без дублирования с обязательным указанием СВФУ в изданиях, индексируемых БД Web of Science и Scopus	Ед.	1	5	<p>1. Khludnev A.M., Popova T.S. Parameter identification problems for thin inclusions in elastic bodies. Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 894, article 0120101. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012101</p> <p>2. A.M.Khludnev. T.S.Popova. On Timoshenko Inclusions in Elastic Bodies Crossing an External Boundary AIP Conference Proceedings 1907, 020007 (2017). <a href="https://doi.org/10.1063/1.5012618">https://doi.org/10.1063/1.5012618</a>.</p> <p>3. T. Popova. On the problem of thin elastic inclusion in two-dimensional viscoelastic body AIP Conference Proceedings 1907, 030045 (2017). <a href="https://doi.org/10.1063/1.5012667">https://doi.org/10.1063/1.5012667</a></p> <p>4. Popova, T.S. Problems of Thin Inclusions in a Two-Dimensional Viscoelastic Body// Journal of Applied and Industrial Mathematics (2018) 12: 313. <a href="https://doi.org/10.1134/S1990478918020114">https://doi.org/10.1134/S1990478918020114</a>.</p> <p>5. N. P. Lazarev, T. S. Popova, G. A. Rogerson. Optimal control of the radius of a rigid circular inclusion in inhomogeneous two-dimensional bodies with cracks // ZAMP (2018) 69:53, p.1-11. <a href="https://doi.org/10.1007/s00033-018-0949-2">https://doi.org/10.1007/s00033-018-0949-2</a></p> <p>6. Khludnev A.M., Popova T.S. Semirigid inclusions in elastic bodies: Mechanical interplay and optimal control// Computers and Mathematics with Applications. 2018. <a href="https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.09.030">https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.09.030</a></p>
3	Публикация научной статьи без дублирования с обязательным	Ед.	1	0	



	указанием СВФУ в изданиях, входящих в БД РИНЦ				
4	Участие в научных программах, грантах, хоздоговорных работах	Ед.	1	1	Конкурс проектов 2018 года фундаментальных научных исследований, проводимый РФФИ совместно с субъектами Российской Федерации. Проект «Анализ математических задач теории трещин в композитных телах»
5	Научное руководство аспирантом / докторантом (соискателем)	Чел.	1	1	Николаева Н.А., аспирант ИМИ СВФУ, науч.руководитель А.М. Хлуднев
6	Рук-во научной публикацией студента / привлечение студента в качестве соавтора в изданиях БД РИНЦ с импакт-фактором >0.1	Чел.	0	0	
7	Участие в научных конференциях: международные	чел.	2	5	VIII межд.конф. по мат.моделированию, 2017 (Якутск): 1. Хлуднев А.М. 2. Попова Т.С. 3. Лазарев Н.П. 4. Неустроева Н.В. 5. Николаева Н.А. XXV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов"(2018, Москва): 6. Семенова Л.Г.
8	Участие в научных конференциях: всероссийские	Чел.	1	1	1. Хлуднев А.М. All-Russian Conference with international participation "Modern problems of continuum mechanics and explosion physics" dedicated to the 60th anniversary of Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS 4–8 September 2017, Novosibirsk, Russian Federation. Публикация: Khludnev A.M., Popova T.S. Parameter identification problems for thin inclusions in elastic bodies. Journal of Physics:

				Conference Series. 2017. Vol. 894, article 0120101. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012101 2. Семенова Л.Г.
--	--	--	--	---

**Список публикаций за отчетный период:**

1. Khludnev A.M., Popova T.S. Parameter identification problems for thin inclusions in elastic bodies. Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 894, article 0120101. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012101
2. A.M.Khludnev. T.S.Popova. On Timoshenko Inclusions in Elastic Bodies Crossing an External Boundary AIP Conference Proceedings 1907, 020007 (2017). <https://doi.org/10.1063/1.5012618>.
3. T. Popova. On the problem of thin elastic inclusion in two-dimensional viscoelastic body AIP Conference Proceedings 1907, 030045 (2017). <https://doi.org/10.1063/1.5012667>
4. Popova, T.S. Problems of Thin Inclusions in a Two-Dimensional Viscoelastic Body// Journal of Applied and Industrial Mathematics (2018) 12: 313. <https://doi.org/10.1134/S1990478918020114>.
5. N. P. Lazarev, T. S. Popova, G. A. Rogerson. Optimal control of the radius of a rigid circular inclusion in inhomogeneous two-dimensional bodies with cracks // ZAMP (2018) 69:53, p.1-11. <https://doi.org/10.1007/s00033-018-0949-2>
6. Попова Т. С. Задачи о тонких включениях в двумерном вязкоупругом теле// Сибирский журнал индустриальной математики. 2018. Т.21, №2(74) DOI 10.17377/sibjim.2018.21.206
7. A.M.Khludnev. T.S.Popova. Semirigid inclusions in elastic bodies: mechanical interplay and optimal control// Computers and Mathematics with Applications (представлено к публикации)