

North-Eastern Federal University named after M.K.Ammosov
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS
Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS
Novosibirsk State University

**7th INTERNATIONAL
CONFERENCE
ON MATHEMATICAL MODELING**

Abstracts

June' 30 – July' 4, 2014

Yakutsk, 2014

Северо-Восточный федеральный
университет имени М.К. Аммосова

Институт математики имени
С.Л. Соболева СО РАН

Институт гидродинамики имени
М.А. Лаврентьева СО РАН

Новосибирский государственный университет

**VII МЕЖДУНАРОДНАЯ
КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
МОДЕЛИРОВАНИЮ**

Тезисы докладов

30 июня – 4 июля 2014 г.

Якутск, 2014

VII Международная конференция по математическому моделированию: Тез. докл. / Под редакцией д.ф.-м.н. И.Е. Егорова., д.ф.-м.н. Ф.М. Федорова – Якутск: ООО "Компания "Дани-Алмас", 2014. – 224 с.

Ответственный за выпуск: Прокопьев А.В.

В сборник включены тезисы докладов, представленных на VII Международной конференции по математическому моделированию.

Доклады участников конференции посвящены актуальным вопросам математического моделирования. Представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов.

Конференция организована при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-06041-г), Программы развития СВФУ и Корпорацией INTEL.

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL PROCESSES IN BIOLOGY

Botkin N. D.

*Center for Mathematics, Technical University of Munich, Garching,
Germany;
botkin@ma.tum.de*

Mathematical modeling can be very effective in the description of mechanical, thermodynamical, hydrodynamical, etc., processes occurring in biological systems. Moreover, modeling of physical processes is necessary in the development of diagnostic and therapeutic medical devices. In this paper, we consider three examples of application of mathematical models in the development of medical technologies.

1. **Simulation of a HPSW-biosensor.** Such a sensor serves for the detection and quantitative measurement of microscopic amounts of biological substances. The operation principle of this device is based on the excitation and detection of acoustic Horizontally Polarized Surface Waves (HPSW) in a multilayered structure whose top surface is in contact with a fluid containing proteins to be detected. The mathematical model of the device involves coupled partial differential equations that describe piezoelectric, elastic and hydrodynamic properties of the structure. One of the more challenging issues in model design is the description of the interaction of a very thin bristle like oscillating receptor layer with the fluid. To this end, we propose a special averaging method based on homogenization theory. Another difficulty is related to very short wavelength compared to the size of the domain, which complicates the use of finite elements. To overcome this difficulty, we propose a harmonic analysis based on the construction of traveling wave solutions. This yields the wavelength, the polarization profile, and the vertical attenuation rate of waves. This information is used to introduce special finite elements whose shape functions decay according to the wave attenuation rate.

2. **Simulation of an elasto-optical nanosensor.** Such a sensor serves for the detection of single biomolecules such as DNA, RNA, proteins, antibodies, etc. The principle is based on the Fluorescence Resonant Energy Transfer (FRET) between two fluorophores bound to an elastic detection molecule

attached onto a surface. This structure is immersed into a moving liquid containing molecules to be detected. Because of flow of the surrounding liquid, the distance between the two fluorophores becomes larger than the Förster radius, and the individual emittance of the fluorophores will vary due to the changed FRET. The entropy elasticity force will drive the polymer chain back to a mean reference elongation state. However, if the detection molecule bonds to an analyte molecule, the mean elongation will change, and the corresponding optical response will give a fingerprint of the trapping. The main problem consists in the implementation of a proper mechanical excitation of the elastic detection molecule to provide its elongation in the case of binding the analyte molecule. The difficulty is stipulated by nanometer size effects in near surface fluid layers. Fluid molecules establish a low mobility layer containing the detection molecule that remains undisturbed. We outline arising problems and present simulations that give a good hint how to overcome the obstacles.

3. Optimal control in cryopreservation of living cells. Cryopreservation of living cells is a necessary part of many medical procedures. However, cells and tissues can be damaged during their freezing and subsequent thawing. We consider different mathematical models of cell damage and outline numerical methods of solving them. The objective of modeling is to reduce cell damage occurring because of sudden supercooling temperature drops, shrinkage of cells caused by the osmotic flow through cell membranes, or the development of dendrite seeds. A dynamic programming method is used as a tool for computing optimized cooling regimes. We use numerical methods for solving related Hamilton-Jacobi equations. Examples of numerical simulations aimed to optimization of cooling and thawing protocols are presented. The results are applied to a real freezing plant.

REFERENCES

1. *Botkin N. D., Turova V. L.* Mathematical models of a biosensor // Applied Mathematical Modelling. 2004. Vol. 28, No. 6. pp. 573–589.
2. *Botkin N. D., Hoffmann K.-H., Marx D, Starovoitov V. N., Turova V. L.* Modeling in the development of an elasto-optical biosensor based on nanostructures // International Journal of Biomathematics and Biostatistics. 2013. Vol. 2, No. 2. pp. 191–202.
3. *Botkin N. D., Hoffmann K.-H., Turova V. L.* Mathematical modeling and simulations in cryopreservation of living cells. // Cryopreservation: Technologies, Applications and Risks/Outcomes. New York: Nova Science Publishers Inc., 2013. pp. 109–176.

UNDERACTUATED WALKING CONTROL VIA THE KINETIC SYMMETRY

Čelikovský Sergej

*Institute of Information Theory and Automation, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, Czech Republic;
celikovs@utia.cas.cz*

Underactuated mechanical systems are those having less actuators than degrees of freedom. Therefore, their control requires intrinsically nonlinear techniques. Among them, various kinds of exact feedback linearization and nonlinear decompositions are useful. The prominent role among underactuated mechanical systems play the underactuated walking robots, typically modeled as the n -link chain with $(n - 1)$ actuators between its links. Important feature here is the so-called **kinetic symmetry** which is typical for all walking-like systems and enables to simplify the model using the partial exact feedback linearization. The simplest underactuated system resembling the walking-like movements is the so-called **Acrobot**, or also **biped or compass gait walker**, having two links and single actuated joint between them only. Acrobot model has four states and one input and thanks to the kinetic symmetry its three dimensional subsystem is exact feedback linearizable, thereby providing several interesting control concepts [2,4-8]. As a matter of fact, it is possible to show that these control concepts can be directly extended to the case of a general underactuated n -link [1,3]. In fact, the series of nonlinear transformations of the continuous-time phase model is developed in [3] that decompose the complex planar n -link into the so-called **generalized Acrobot** and $n - 2$ double integrators used to impose certain walking pattern via suitable selected virtual constraints. Such a **virtual constraint technique** was used for robotic walking *e.g.* in [9-11]; nevertheless, unlike [3] constrained systems in [9-11] fail to preserve the kinetic symmetry.

Important feature of the walking-like systems is the so-called impact map occurring when the swing leg touches the ground. Impact map is the impulsive component of the walking model causing an instantaneous jump of the system state. This makes the walking model to be the hybrid system and the above mentioned decomposition of its continuous-time part is not sufficient. Therefore, the so-called hybrid embedding should be investigated as well. It turns out that the hybrid embedding can be assured by special selection of constraining walking-like patterns, namely, by some boundary conditions imposed on the derivatives of constraining functions.

REFERENCES

1. Anderle M., Čelikovský S., Ibarra H. Virtual constraints for the underactuated walking design: comparison of two approaches // Proceedings of the 2013 Asian Control Conference 2013, Istanbul: IEEE, 2013.
2. Anderle M., Čelikovský S. Approximate feedback linearization of the Acrobot tracking error dynamics with application to its walking-like trajectory tracking // Proceedings of the 2012 20th Mediterranean Conference on Control and Automation, Barcelona: IEEE, 2012.
3. Čelikovský S., Anderle M., Moog C. Embedding the acrobot into a general underactuated n -link with application to novel walking design // Proceedings of the 2013 European Control Conference, Zurich: EUCA, 2013, p. 682-689.
4. Anderle M., Čelikovský S. Stability analysis of the Acrobot walking with observed geometry // Preprints of the 18th World Congress IFAC, Milan: IFAC, 2011, p. 1046–1051.
5. Anderle M., Čelikovský S. Feedback design for the Acrobot walking-like trajectory tracking and computational test of its exponential stability // Proceedings of the 2011 IEEE Multi-Conference on Systems and Control. Denver: IEEE, 2011. p. 1026–1031.
6. Anderle M., Čelikovský S. Sustainable Acrobot walking based on the swing phase exponentially stable tracking // Proceedings of the ASME 2010 Dynamic Systems and Control Conference. Cambridge, Massachusetts, USA: ASME, p. 1/8–8/8.
7. Anderle M., Čelikovský S. Analytical design of the Acrobot exponential tracking with application to its walking // Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Control and Automation. Christchurch, New Zealand: ICCA, p. 163–168.
8. Anderle M., Čelikovský S., Henrion D., Zikmund J. Advanced LMI based analysis and design for Acrobot walking // International Journal of Control, 2010, Vol. 83, No. 8, p. 1641–1652.
9. Grizzle J.W., Chevallereau Ch., Ames A.A., Sinnet R.W. 3D Bipedal Robotic Walking: Models, Feedback Control, and Open Problems // Preprints of the 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems. Bologna: IFAC, 2011. p. 505–532.
10. Grizzle J.W., Moog C., Chevallereau Ch. Nonlinear control of mechanical systems with an unactuated cyclic variable // IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, Vol. 50, p. 559–576.
11. Westerwelt E.R., Grizzle J.W., Chevallereau Ch., Choi J.H., Morris B. Feedback Control of Dynamic Bipedal Robot Locomotion. CRC Press, 2007.

INVERSE PROBLEMS RELATED TO A TIMOSHENKO BEAM AND APPLICATIONS IN ENGINEERING SCIENCES

Hasanoglu A.¹, Baysal O.

*Department of Mathematics and Computer Science, Izmir University, Izmir,
Turkey;*

¹alemdar.hasanoglu@izmir.edu.tr

Two inverse problems related to mathematical models of suspension bridge and helicopter rotor blade governed by Timoshenko beam equation are studied.

In the first inverse problem, one needs to determine the unknown spacewise load $F(x)$ in the initial-boundary value problem

$$\begin{cases} m(x)u_{tt} = -(EI(x)u_{xx})_{xx} + F(x)H(t), & (x, t) \in \Omega_T \\ u(0, t) = u_x(0, t) = u(l, t) = u_x(l, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in (0, l), \end{cases} \quad (1)$$

for an elastic beam clamped at both ends, from the supplementary measurement

$$u_T(x) := u(x, T), \quad x \in (0, l) \quad (2)$$

at the final time $T > 0$. In the second inverse problem the problem of identifying the unknown time dependent load $H(t)$ in the initial-boundary value problem

$$\begin{cases} m(x)u_{tt} = -(EI(x)u_{xx})_{xx} + F(x)H(t), & (x, t) \in \Omega_T \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, & t \in (0, T), \\ (EI(x)u_{xx})|_{x=l} = 0, \quad ((EI(x)u_{xx})_x)|_{x=l} = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in (0, l) \end{cases} \quad (3)$$

for a cantilever beam, from the measured bending moment

$$\mathcal{M}(t) := (EI(x)u_{xx}(x, t))|_{x=l}, \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

is studied.

Although both problems (1) – (2) and (3) – (4) are of inverse source problems, they have different degrees of ill-posedness. The approach proposed here is based on the weak solution theory for PDEs and the quasi-solution approach using adjoint problems. Introducing the input-output map for both inverse problems, it is proved that these maps are compact operators. Then Frechet differentiability of the corresponding cost functionals are proved. For each cost functional explicit gradient formulas are derived. Based on these explicit formulas conjugate gradient algorithm is proposed for numerical solution of the considered inverse problems. Numerical results illustrate bounds of applicability of the proposed approach, also an efficiency and accuracy of the implemented algorithm.

REFERENCES

1. A. Hasanov Identification of an unknown source term in a vibrating cantilevered beam from final overdetermination // Inverse Problems, 2009. N 25.
2. A. Hasanov, O. Baysal Identification of an unknown spatial load distribution in a vibrating cantilevered beam from final overdetermination // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2014.

MEAN-FIELD GAMES AND THEIR APPLICATIONS

Kolokoltsov V. N.

University of Warwick, Coventry, United Kingdom;
v.kolokoltsov@warwick.ac.uk

Mean field games is a quickly developing new branch of optimal control theory that has arisen on the meeting point of statistical mechanics, game theory and the theory of partial differential (and pseudo-differential) equations. The main idea is to extend the well developed mean-field-limit approach for the analysis of interacting particles to the systems of a large number of interacting agents, each having his/her own objective. Analytically this leads to a new class of problems of the theory of differential equations, namely to remarkable systems of forward-backward pseudodifferential equations with half initial - half terminal additional conditions. Being extremely rich in new mathematical settings and perspective developments, the range of applications of this methodology is also quite impressive and continues to grow.

It includes energy distribution and energy pricing problem, analysis of limit order book in financial mathematics, inspection-corruption games, various problems from electrical engineering and many others. The most intriguing and mathematically demanding recent development concerns the mean-field games that include a major player and/or common noise. We shall review this circle of ideas stressing primarily mathematical challenges and results and touching briefly some basic applications.

**SUPERCRITICAL AND CRITICAL CASES FOR 2D AND 3D
BVP FOR QUASILINEAR EQUATIONS OF MIXED
ELLIPTIC-HYPERBOLIC TYPE**

Popivanov N.

*Department of Mathematics and Informatics, University of Sofia, Sofia,
Bulgaria;
nedyu@fmi.uni-sofia.bg*

This talk is based on our joint work with D. Lupo, K. Payne (Italy) and L. Dechevski (Norway), already published, or in progress.

Starting from the ground-breaking paper of Pohožaev (1965), it is well known that the homogeneous Dirichlet problem for semilinear elliptic equations such as $\Delta u + u|u|^{p-2} = 0$ in Ω – a bounded subset of \mathbb{R}^n , with $n \geq 3$, permits only the trivial solution $u \equiv 0$ if the domain is star-shaped, the solution is sufficiently regular, and $p > 2^*(n) := 2n/(n-2)$. The latter quantity is the critical exponent in the Sobolev embedding of $H_0^1(\Omega)$ into $L^p(\Omega)$ for $p \leq 2^*(n)$, which fails to be compact at the critical exponent. In dimension $n = 2$, the critical nonlinearity is of exponential type, but it has been shown that the nonexistence principle in supercritical case also holds for certain two dimensional problems of mixed elliptic-hyperbolic type for the mixed elliptic-hyperbolic Gellersted operator L , and is also valid for a large class of such problems even in higher dimensions. In dimension 2, such operators have a long-standing connection with transonic fluid flow. All such operators are invariant with respect to a certain anisotropic dilation which defines a suitable notion of star-shapedness by using the flow of the vector field which is the infinitesimal generator of the invariance. In all cases, for the operator L the critical exponent phenomenon is of pure power type $u|u|^{p-2}$, where p agrees with a critical Sobolev exponent ($p = 2^*(n, m)$) in the embedding of a suitably weighted version of $H_0^1(\Omega)$ into $L^p(\Omega)$. As usual, in BVP for such mixed elliptic-hyperbolic Gellersted operator L , the boundary data's part Σ is a proper subset or all of $\partial\Omega$. The set Γ on which no data is prescribed is a piece of a characteristic surface. The lack of a boundary condition on Γ complicates the control of the corresponding boundary integral in the Pohožaev argument, but if Γ is characteristic and tangential to the dilation flow, a sharp Hardy-Sobolev inequality ensures that the contribution along Γ has the “right” sign, that suffices for completion of the estimate.

In all 2D and multidimensional cases the results are like

Theorem. Let $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ be a Guderley-Morawetz domain (or Tricomi domain, or Tricomi-Frankl domain). Under some restrictions on the boundary (which are fixed in each case), if the nonlinearity is $F(u) = u^p$, if

$p > 2^*(2, m) = 2(m + 4)/m$ (*the critical Sobolev exponent*), then for solutions $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ it follows $u \equiv 0$. The same is true also at the critical case $p = 2^*(1, m)$ if we suppose in addition that some part of the boundary is strongly star-like surface at its noncharacteristic points.

The multidimensional cases are given for some Protter-Morawetz problems, which linear variant is strongly over determined in a sense of classical solvability.

Two type of Open Questions:

1. Some nonexistence results for generalized solutions also?
2. Existence results of nontrivial solutions in the subcritical cases?

**SMALL-TIME SOLVABILITY OF PRIMITIVE EQUATIONS OF
THE COUPLED ATMOSPHERE AND OCEAN**

Tani A.¹, Honda H.

Department of Mathematics, Keio University, Japan;

¹tani@math.keio.ac.jp

In this communication, we are concerned with the free boundary problem of the primitive equations for the coupled atmosphere and ocean in three-dimensional strip with surface tension.

The primitive equations for atmosphere were first introduced by Richardson in 1920's with the purpose of the numerical weather forecast. On the other hand, the primitive equations for ocean were introduced by Bryan in 1969 as a model of the ocean circulation by applying the hydrostatic approximation. In this model Boussinesq approximation and rigid lid hypothesis are also used. Later in 1970 Crowly studied the free surface case, not the rigid lid, of ocean numerically.

One of the main features of primitive equations is the fact that the vertical velocity is determined by the horizontal velocities via the continuity equation, since the vertical velocity does not appear in the vertical component of equations of motion due to the hydrostatic approximation.

Mathematical arguments for the evolutionary 3D ocean model with rigid lid were begun in 1990's by Lions, Temam and Wang. Further, they studied the coupled atmosphere and ocean model, which are described in Cartesian coordinates for the ocean, while in p -coordinates for the atmosphere, by assuming that the height of pressure isobar coincides with the hight of the rigid lid. In general, this assumption does not hold true.

We discussed the well-posedness for the ocean model by using the p -coordinates in 2012. The free boundary problem for the atmospheric model was also discussed in 2010.

Based on these results, we are concerned with the free boundary problem of the primitive equations for the coupled atmosphere and ocean in three-dimensional strip with surface tension in Sobolev-Slobodetskiĭ spaces by using two coordinate transformations: p -coordinates and a coordinate transformation fixing the time-dependent domain.

MODELING OF THE DAMPING OF MULTIPERFORATED PLATES

Tordeux S.

*Projet Magique 3D, INRIA Bordeaux Sud-Ouest LMA - UMR CNRS 5142,
Université de Pau et des Pays de l'Adour
sebastien.tordeux@univ-pau.fr*

New environmental standards force the aeronautic industries to develop green technologies. One of the promising technique consists in using turbo-reactors with high air-fuel ratio which ensures a complete combustion of fuel. This improves the performance of the motors and reduces pollution. However, this mixture is less stable and interacts strongly with the acoustic wave. In a turbo engine, the temperature of the combustion chamber can reach 2000 K. To protect the structure, small holes are perforated through the wall linking the combustion chamber to the casing and fresh air (600 K) is injected. These multiperforated plates are one of the main sources of acoustic noise. In real configurations, direct numerical computations are beyond reach. This is mostly due to the large number of perforations (approximately 2000) and to their small characteristic lengths (diameter of a perforation 0.5mm; spacing between two perforations 5mm) with respect to the wave length (500mm approximately). In this talk, I will present a rigorous approach to derive approximate models to replace multiperforated plates by an equivalent transmission impedance condition in the context of linear acoustics. Later, I will explain how some damping due to the Helmholtz layers can be integrated to these models.

**СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ РАЗРАБОТКИ
ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ: ОВЗОР
НОВЕЙШИХ ПРОГРАММНЫХ ИНСТРУМЕНТОВ INTEL,
ПРИМЕРЫ ИХ ЭФФЕКТИВНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ И
СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ INTEL ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ
РАЗРАБОТЧИКОВ**

**MODERN TRENDS IN THE DEVELOPMENT OF
HIGH-PERFORMANCE APPLICATIONS: OVERVIEW OF THE
LATEST SOFTWARE TOOLS INTEL, EXAMPLES OF
EFFECTIVE USE OF INTEL AND SPECIAL PROGRAMS TO
SUPPORT DEVELOPERS**

Авдеев А. В.

Корпорация Intel, Новосибирск, Россия;
alexander.v.avdeev@intel.com

В докладе будет рассказано о современных тенденциях разработки высокопроизводительных приложений и дан обзор новейших программных инструментов Intel - Intel® Parallel Studio XE 2013 и Intel® Cluster Studio XE 2013, которые включают оптимизированные компиляторы, математические библиотеки и средства оптимизации и распараллеливания программ. Эти инструменты позволяют разработчикам оптимизировать скорость работы приложений в системах на базе процессоров текущего и будущих поколений, включая новейшие сопроцессоры Intel® Xeon PhiTM. Наборы инструментов помогают специалистам с наименьшими усилиями повышать производительность приложений, запускаемых на серверах, вычислительных кластерах, рабочих станциях, настольных ПК и на устройствах UltrabookTM. Будут показаны примеры эффективного использования программных инструментов Intel. Особое внимание будет уделено вопросам лицензирования программных инструментов Intel и различным вариантам предоставления лицензий на программные инструменты Intel. Также в докладе будет рассказано об университетских, академических и партнерских программах Intel.

ЛИТЕРАТУРА

1. Intel® Software Tools Information: <http://www.intel.com/software/products>
2. Intel® Software online trainings, forums and other resources <http://software.intel.com/en-us/intel-learning-lab/>
<http://software.intel.com/en-us/articles/intel-sdp-resources/>
<https://premier.intel.com> <http://software.intel.com/en-us/forums/>
3. Intel® Software Development Products Registration Center: <https://registrationcenter.intel.com>

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА
ВТОРОГО ПОРЯДКА**

**NUMERICAL SOLVING THE BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR FRACTIONAL POWERS OF ELLIPTIC OPERATORS**

Вабищевич П. Н.^{1,2}

¹ Институт проблем безопасности развития атомной энергетики РАН,
Москва, Россия; vab@ibrae.ac.ru

² ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия; vabishchevich@gmail.com

В последнее время активно обсуждаются нелокальные прикладные математические модели, которые базируются на использовании дробных производных по времени и по пространству. Интересным примером является краевая задача для дробной степени эллиптического оператора, например, в ограниченной области Ω ищется решение задачи

$$(-\Delta)^\alpha u = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

где $0 < \alpha < 1$.

При приближенном решении подобных краевых задач используются различные подходы. Простейший вариант связан с явных построением решения при известных собственных значениях и собственных функциях эллиптического оператора, диагонализации соответствующей матрицы. В силу большой вычислительной сложности такой подход при рассмотрении многомерных задач использовать затруднительно.

Отметим метод, который базируется на представлении степени эллиптического оператора в виде интеграла по контуру (представление Данфорда–Коши) и применении соответствующих квадратурных формул с узлами интегрирования на комплексной плоскости. Приближенный оператор представляется в виде суммы резольвент, при этом обеспечивается экспоненциальная сходимость квадратурных аппроксимаций. В некоторых работах используются квадратурные формулы с узлами на действительной оси, которые построены на основе соответствующего интегрального представления для степени оператора. В этом случае для обратного оператора нашей задачи мы имеем аддитивное представление, каждое операторное слагаемое в котором есть обычный обратный эллиптический оператор.

Необходимо также отметить возможность нахождения решения для дробной степени эллиптического оператора как решения эллиптической краевой задачи большей размерности — вводится новая переменная. В ряде работ эта

возможность обсуждается на дифференциальном уровне, имеются также работы по обоснованию вычислительного алгоритма. Вычислительная эффективность подобных алгоритмов не очень высокая, к тому же расширенная эллиптическая краевая задача является сингулярно возмущенной и задача решается в полубесконечном цилиндре.

После конечно-разностной или конечно-элементной аппроксимации от рассматриваемой краевой задачи для дробной степени эллиптического оператора мы приходим к задаче вычисления умножения дробной степени матрицы, соответствующей эллиптическому оператору, на вектор, который соответствует правой части. Для такой матричной задачи используются различные подходы. Особого внимания заслуживают методы на основе решения задачи Коши для соответствующего эволюционного уравнения. Например, при решении матричных задач в случае $\alpha = -0.5$ приближенное решение находится как решение нестационарной задачи на единичном отрезке по времени. Такого типа вычислительные алгоритмы имеют несомненные достоинства, связанные, в частности, с их относительной простотой и привычностью: вычислительная практика приближенного решения стационарных задач часто основывается на переходе к нестационарной задаче.

В нашей работе вычислительный алгоритм для приближенного решения краевой задачи для дробной степени эллиптического оператора строится на основе перехода к псевдопараболическому уравнению. Показана устойчивость двухслойной схемы с весами, проведены численные эксперименты по решению модельной двумерной задачи на основе стандартной конечно-элементной аппроксимации.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

ON SOLVABILITY OF SOME CONJUGATION PROBLEMS FOR NONCLASSICAL HIGHER ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Кожанов А. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия;
kozhanov@math.nsc.ru

Рассматриваются задачи сопряжения или обобщенные задачи дифракции для неклассических дифференциальных уравнений вида

$$(-1)^{p+1} D_t^{2p} u - h(x)u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

($-1 < x < 1$, $0 < t < T < +\infty$, $p > 0$ – целое число, $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$) с функцией $h(x)$, имеющей, быть может, одну или несколько точек разрыва первого рода.

Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Помимо задачи сопряжения для уравнения (1) изучаются также задачи сопряжения для некоторых других неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка.

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО С НАКЛОННОЙ ТРЕЩИНОЙ

EQUILIBRIUM PROBLEM FOR A TIMOSHENKO PLATE WITH AN OBLIQUE CRACK.

Лазарев Н. П.

Научно-исследовательский институт математики СВФУ, Якутск,
Россия;
nyurgun@ngs.ru

Для пластины модели Тимошенко выводится краевое условие в виде неравенства, описывающее взаимное непроникание противоположных берегов трещины. При этом предполагается, что нормаль к поверхности трещины образует малый угол со срединной плоскостью. Ранее, при таком же предложении условие непроникания было предложено для наклонной трещины, содержащейся в пластине модели Кирхгофа–Лява [1]. Модели пластины с вертикальной трещиной, в которых используются условия непроникания в виде неравенств для берегов трещины, хорошо изучены, см., например, [2]. Вариационная задача о равновесии пластины формулируется в виде задачи минимизации функционала энергии над множеством допустимых функций, которые удовлетворяют условию непроникания. Доказана однозначная разрешимость задачи. Получены соотношения, описывающие механическое взаимодействие противоположных берегов трещины. При условии достаточной гладкости решения задачи минимизации для исходной вариационной постановки получена эквивалентная формулировка в виде краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковтуненко В. А., Леонтьев А. Н., Хлуднев А. М. Задача о равновесии пластины с наклонным разрезом // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 164–174.
2. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ¹

ON SOME CLASSES OF INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS

Пятков С. Г.

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия;
pyatkov@math.nsc.ru

Пусть G – область в \mathbb{R}^n с границей Γ класса C^{2m} и $Q = (0, T) \times G$. Параболическое уравнение имеет вид

$$u_t + A(t, x, D)u = g = \sum_{i=k+1}^r b_i(t, x)q_i(t, x') + f, \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

где $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ и A – матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размерности $h \times h$, представимый в виде

$$A(t, x, D) = \sum_{j=1}^k q_i(x', t) \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha^j(t, x) D^\alpha, \quad D = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}).$$

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(t, x) D^\beta u|_S = g_j(t, x), \quad (2)$$

где $m_j < 2m$, $j = 1, 2, \dots, m$ и $S = (0, T) \times \Gamma$. Неизвестными являются решение u , функции $q_i(t, x')$ ($i = 1, 2, \dots, r$), входящие в правую часть (1). Условия переопределения для нахождения этих функций q_i имеют вид

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}|_{S_i} = \psi_{ik}(t, x'), \quad S_i = (0, T) \times \Gamma_i, \quad k = 0, 1, \dots, r_i - 1, \quad (3)$$

где $\{\Gamma_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) – множество гладких $n - 1$ -мерных поверхностей, лежащих в G , $1 \leq r_i \leq 2m$ для всех i и $r = h(r_1 + r_2 + \dots + r_s)$. Проблемы подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях. Мы приводим условия на граничные операторы и геометрию области, гарантирующие безусловную разрешимость задачи (1)-(3).

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 12-01-00260).

МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ СИСТЕМА ЭЙЛЕРА, НЕВЯЗКИЕ РЕШЕНИЯ

EULER MULTICOMPONENT SYSTEM, NONVISCOSUS SOLUTIONS

Радкевич Е. В.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва,
Россия;
evrad07@gmail.com

Для многокомпонентной системы Эйлера приводится нестандартная регуляризация, введением вязкости и диффузионного расслоения. Исследована проблема локальной достижимости точек фазового пространства. Построены асимптотики двух двойственных бифуркаций однородных решений усеченной системы Эйлера в двухфронтовые решения. Показан сверхзвуковой характер появления бифуркаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яковлев Н.Н., Лукашев Е.А., Палин В.В., Радкевич Е.В. О неклассической регуляризации многокомпонентной системы Эйлера, Journal of Mathematical Sciences (New York, Springer) Vol. 193, No. 2, August 28, 2013
2. Радкевич Е.В. О природе бифуркаций однофронтовых решений усеченной системы Эйлера / / Journal of Mathematical Sciences (New York, Springer) Vol. 196, No. 3(2014)

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR THE EQUATIONS OF MIXED TYPE

Сабитов К. Б.

Институт прикладных исследований Республики Башкортостан,
Стерлитамак, Россия;
sabitov_fmf@mail.ru

Рассмотрим уравнение параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + q(x)u = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, t) | 0 < x < \pi, -\alpha < t < \beta\}$, где α и β – заданные положительные числа. Потенциал (или коэффициент теплообмена) $q(x)$ – определенная на $[0, \pi]$ достаточно гладкая функция, причем $q(x) \geq 0$.

В начале рассмотрим случай, когда $q(x)$ известен.

Начально-граничные задачи. Найти в области D функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, t) \in C^1(\bar{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \quad (2)$$

$$Lu(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D_+ \cup D_-; \quad (3)$$

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) + Hu(\pi, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (5)$$

где h и H – заданные положительные постоянные, $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

В уравнении (1), разделяя переменные $u(x, t) = X(x)T(t)$, относительно $X(x)$ получим спектральную задачу:

$$X''(x) + (\lambda - q(x))X(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad (6)$$

$$X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(\pi) + HX(\pi) = 0. \quad (7)$$

Как известно, что при $q(x) \in C^1[0, \pi]$ задача (6) и (7) имеет счетное множество собственных значений λ_n , $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, а соответствующая система собственных функций $\{X_n(x)\}$ ортогональна и полна в пространстве $L_2[0, \pi]$, и поэтому в нем образует ортогональный базис. При этом справедлива асимптотическая формула при больших n :

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{где } \omega = h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx.$$

Теорема 1. Если существует решение задачи (2)–(5), то оно единственno только тогда, когда при всех $n \in \mathbb{N}_0$ выполнены условия

$$\cos \rho_n \alpha + \rho_n \sin \rho_n \alpha \neq 0. \quad (8)$$

Пусть теперь в постановке задачи (2)–(5) неизвестны функции $u(x, t)$, $q(x)$ и постоянная h и $H = 0$. На основании теории обратной задачи для уравнения теплопроводности [1] будем предполагать выполнение одного из следующих условий:

- известна дополнительная информация о решении задачи (2)–(5) на стороне $x = \pi$:

$$u(\pi, t) = \psi(t), \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (9)$$

или на стороне $x = 0$:

$$u(0, t) = \psi_0(t), \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (10)$$

где $\psi(t)$ и $\psi_0(t)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Задача 1. Найти функции $u(x, t)$, $q(x)$ и число h , удовлетворяющие условиям (2), (3), (5), (9) и

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = \mu(t), \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (11)$$

где $\mu(t)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Задача 2. Найти функции $u(x, t)$ и $q(x)$, удовлетворяющие условиям (2), (3), (5), (10) и (11).

Теорема 2. Пусть $u_1(x, t)$, $q_1(x)$, h_1 и $u_2(x, t)$, $q_2(x)$, h_2 – решения задачи 1 и выполнены условия (8) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q_1(x) = q_2(x)$ на $[0, \pi]$ и $h_1 = h_2$, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в \overline{D} .

Теорема 3. Пусть $u_i(x, t)$ и $q_i(x)$, $i = 1, 2$, решения задачи 2 с $q_i(x) = q_i(\pi - x)$ и $h = 0$, и выполнены условия (8) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q_1(x) = q_2(x)$ на $[0, \pi]$ и $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в \overline{D} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М.:МГУ, 1994.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ДВУМЕРНОМ КОМПЛЕКСЕ¹

THE SOLVABILITY OF LINEAR INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION OF HIGH ORDER WITH TWO UNKNOWN COEFFICIENTS

Солдатов А. П.

Белгородский национальный исследовательский государственный
университет, Белгород, Казахстан;
soldatov48@gmail.com, soldatov@bsu.edu.ru

Теории эллиптических уравнений на стратифицированных множествах посвящены многочисленные исследования (см., например, [1]). Качественное исследование краевых задач на этих множествах основано на применении векторных дифференциальных операций с помощью надлежащего определения меры. В данной работе рассматриваются гармонические функции на двумерном стратифицированном множестве K , который для простоты предполагается комплексом. В ней предлагается теоретико функциональный подход к исследованию задачи Дирихле для этих функций, основанный на ее сведении к так называемой нелокальной задаче Римана[2] для аналитических функций.

¹Работа выполнена при поддержке Международного проекта (0113РК01031) Министерства образования и науки Республики Казахстан

Под двумерным комплексом K ниже понимается объединение конечно-го числа многоугольников, которые попарно могут пересекаться лишь по своим вершинам либо сторонам. В этом объединении многоугольники M называем гранями комплекса, а отрезки L , являющиеся стороной одной или нескольких граней – ребрами. Вершины τ этих многоугольников составляют вершины комплекса. Удобно множества граней, ребер и вершин обозначать, соответственно, \mathcal{M} , \mathcal{L} и F . Пусть \mathcal{M}_τ и \mathcal{L}_τ означает множество всех, соответственно, граней и ребер, имеющих τ своей вершиной. Аналогичный смысл имеет множество \mathcal{M}_L граней, имеющих своей стороной ребро L . Число элементов этих множеств обозначим, соответственно, m_τ , l_τ и m_L , число m_L называем также кратностью ребра L . Ребра кратности 1 относим к сторонам комплекса K .

Зафиксируем некоторое подмножество сторон, которое обозначим $\mathcal{L}(D)$, в дальнейшем они будут служить носителями данных задачи Дирихле. В противоположность этому во внутренних точках ребер $L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}(D)$ будет введено понятие гармоничности, поэтому множество $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}(D)$ обозначаем $\mathcal{L}(H)$. Пусть $K^1(D) \subseteq \mathbb{R}^3$ означает объединение отрезков $L \in \mathcal{L}(D)$.

Обозначим $\dot{K}(D)$ совокупность внутренностей граней $M \in \mathcal{M}$ и ребер $L \in \mathcal{L}(H)$, т.е $\dot{K} = K \setminus (F \cup K^1(D))$. По определению непрерывная на $\dot{K}(D)$ функция u гармонична, если гармоничны все ее сужения на грани и для каждого ребра $L \in \mathcal{L}(H)$ выполняется соотношение

$$\sum_{M \in \mathcal{M}_L} \frac{\partial u_M}{\partial \nu_M} \Big|_L = 0, \quad u_M = u|_M,$$

где ν_M означает внутреннюю единичную нормаль на L по отношению к области M .

Задача Дирихле (задача D) заключается в отыскании гармонической на $\dot{K}(D)$ функции $u \in C(K \setminus F)$ по краевому условию

$$u|_{K^1(D)} = f,$$

где функция $f \in C[K^1(D) \setminus F]$ задана.

Эта задача рассматривается в классе Гельдера $C^\mu(\overline{K})$, а также в классе $C_{-0}^\mu(K, F)$ функций, принадлежащих C^μ вне любой окрестности F и в точках $\tau \in F$ допускающих особенности логарифмического характера. Показано, что задача Дирихле фредгольмова в каждом из этих классов. Индекс этой задачи описан в терминах так называемого концевого символа - семейства аналитических матриц-функций $W_\tau(\zeta)$, $\tau \in F$. Здесь W_τ – матрица порядка $2m_\tau$, где m_τ – число двумерных страт, имеющих τ своей вершиной, которая зависит только от геометрической структуры комплекса K и выбора $K^1(D)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Пряднев В.Л., и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах, М.: Физматлит, 2004, 272с.
2. Солдатов А.П. Общая краевая задача теории функций, Докл.АН СССР 1988. Т.299, №.4, С.825-828.

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ¹

ANALYSIS OF MATHEMATICAL DYNAMIC MODELS BY THE HELP OF METHODS OF THE THEORY OF OPTIMAL CONTROL

Субботина Н. Н.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УО РАН,
Екатеринбург, Россия;
subb@uran.ru

Среди фундаментальных исследований динамических систем важную роль играет анализ параметров математических моделей и оценка совместности моделей с известной статистикой измерений. При этом ключевую роль играют приложения теории оптимального управления [1,2].

Рассматривается обратная задача динамики для системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) + G(t, x(t))u(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in R^n, \quad (1)$$

управление u ограничено:

$$u \in U = \{u_i \in [a_i^-, a_i^+], \quad a_i^- < a_i^+, \quad i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2).$$

Предполагается, что задана непрерывная функция $y(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — история замеров фазовой переменной системы, причем известно, что точное движение $x_*(t)$ содержится в полосе достоверности замеров Ω_δ

$$(t, x_*(t)) \in \Omega_\delta = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n : \|x - y(t)\| \leq \delta\}, \quad (3)$$

где параметр погрешности измерений $\delta > 0$, а символ $\|z\|$ означает евклидову норму конечномерного вектора z .

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 14-01-00168) и Президиума РАН (программа сотрудничества УрО и СО РАН)

Обратная δ -задача динамики состоит в построении управлений $u^\delta(\cdot)$ и порожденных ими траекторий $x^\delta(\cdot)$ системы (1), (2), которые удовлетворяют условию

$$\max_{t \in [0, T]} \|x^\delta(t) - x_*(t)\| \rightarrow 0, \text{ при } \delta \rightarrow 0, \quad (4)$$

а порождающие их управления сходятся в пространстве L_2 к управлению $u_*(\cdot)$, порождающему исходную траекторию $x_*(\cdot)$ и имеющему при этом минимальную норму в L_2 .

Предлагается решение обратной задачи, базирующееся на решении задачи позиционного оптимального управления (см. [3]) с функционалом невязки вида

$$I_{t_0, x_0}(u(\cdot)) = \int_0^T \left[-\frac{(x(t) - y(t))^2}{2} + \frac{\alpha}{2} \|u(t)\|^2 \right] dt \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathbf{U}[t_0, T]}. \quad (5)$$

Здесь $\alpha > 0$ – малый регуляризующий параметр, $(t_0, x_0) \in \Omega_\delta$, $x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ – траектория системы (1), стартующая из точки $x(t_0) = x_0$ и порожденная измеримым управлением $u(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow U$, множество $\mathbf{U}[t_0, T]$ состоит из всех измеримых управлений $u(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow U$.

Разработаны численные методы решения обратных задач, получены условия согласования параметров аппроксимации δ и α и доказана сходимость методов. В качестве иллюстративного примера рассмотрена задача реконструкции управлений одной макроэкономической модели при известной статистике замеров показателей макроэкономики.

Обсуждаются возможности применения этого подхода для решения задач идентификации параметров модели динамической системы при неполных данных на примере модели гравитации.

Приводятся также результаты приложений теории оптимального управления для описания кусочно-гладких решений законов сохранения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понtryгин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкrelidze Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.:Наука, 1961.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.:Наука, 1974.
3. Субботина Н. Н., Колпакова Е. А., Токманцев Т. Б., Шагалова Л. Г. Метод характеристик для уравнения Гамильтона - Якоби - Беллмана. Екатеринбург: РИО УрО РАН. 2013.

ОБ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ¹

ABOUT THE GENERAL THEORY OF INFINITE SYSTEM OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

Федоров Ф. М.

Научно-исследовательский институт математики СВФУ, Якутск,
Россия;
foma_46@mail.ru

В настоящем докладе освещены основные аспекты развития общей теории бесконечных систем, предложенные и развивающиеся нами [1–7].

Прежде всего обобщен алгоритм Гаусса на бесконечные системы. Если бесконечный определитель матрицы исходной системы не равен нулю, т. е. матрица системы имеет бесконечный ранг, то исходная матрица разлагается в произведение двух матриц: треугольной и гауссовой. Последнее позволяет рассматривать только гауссову систему. При изучении гауссовой системы появляется возможность точного решения соответствующей усеченной системы для каждого n , не связывая ее решение с приближенными методами, скажем, методом последовательных приближений. При этом метод редукции применяется в двояком смысле: в узком – для решения неоднородных систем и в широком – для однородных систем. Введено понятие **строго частного решения** гауссовых систем – это решение, которое можно получить методом редукции в узком смысле. Строго частное решение является единственным частным решением, которое подчиняется правилу Крамера, тем самым обобщается теорема Крамера на бесконечные системы.

В случае совместности бесконечной системы получено ее строго частное решение в замкнутом аналитическом виде. Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях существования нетривиальных решений однородных гауссовых систем. В случае выполнения этих условий получены замкнутые нетривиальные решения однородных систем.

Когда бесконечный определитель системы равен нулю, то введением понятия **декремента** бесконечных матриц и определителей, обобщены теоремы типа Кронекера-Капелли о существовании решений бесконечных систем.

В заключение рассмотрим пример бесконечной системы, которая априори исключалась из рассмотрения:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2j+2p)!}{(2p)!} x_{j+p} = b^j, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad b = \text{const} > 0. \quad (1)$$

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект №3047)

Известными методами невозможно решить систему (1), более того, нельзя доказать даже существование решения.

Тем не менее данная система имеет строго частное решение неоднородной системы (1), кроме того, нам удалось найти и фундаментальное решение соответствующей однородной ($b = 0$) системы (1):

$$x_i^{(k)} = \frac{b^i}{(2i)!\operatorname{ch}(\sqrt{b})} + \frac{(-1)^i \pi^{2i} (2k+1)^{2i} x_0}{(2i)! 2^{2i}}, \quad i, k = 0, 1, 2, \dots,$$

тем самим практически нашли ее общее решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. М. Периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Новосибирск: Наука, 2009.
2. Федоров Ф. М. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений и их приложения. Новосибирск: Наука, 2011.
3. Федоров Ф. М. Границный метод решения прикладных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 2000.
4. Федоров Ф. М. Об алгоритме Гаусса для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, вып. 1. С. 133–140.
5. Федоров Ф. М. К теории гауссовых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 209–217.
6. Федоров Ф. М. Неоднородные гауссовые бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, вып. 1. С. 124–131.
7. Федоров Ф. М. О крамеровости гауссовых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, вып. 2. С. 162–170.

Секция I. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

EXACT SOLUTIONS OF GASDYNAMIC EQUATIONS OBTAINED BY THE METHOD OF CONSERVATION LAWS

Avdonina E.¹, Ibragimov N.¹, Khamitova R.²

¹Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia; nailhib@mail.ru
²Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden; rkh@bth.se

The recent method of conservation laws for constructing exact solutions for systems of nonlinear partial differential equations is applied to the gasdynamic equations describing one-dimensional and three-dimensional polytropic flows. In the one-dimensional case singular solutions are constructed in closed forms. In the three-dimensional case several conservation laws are used simultaneously. It is shown that the method of conservation laws leads to particular solutions different from group invariant solutions.

PARTIALLY INVARIANT NONLINEAR OSCILLATIONS VISCOELASTIC BAR¹

Chirkunov Y.A.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia;
chr101@mail.ru

Nonlinear longitudinal vibrations of viscoelastic rod with a uniform cross-section in model Kelvin described by the equation:

$$u_{tt} = \sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xxt} \quad (1)$$

where t - the time; x - coordinate describing the situation of the cross-section of the bar; $u = u(t, x)$ - longitudinal travel section of a bar overtime t ; $\lambda \neq 0$ the coefficient of viscosity; $\sigma = \sigma(u_x)$ - voltage. Prime denotes the differentiation. Assume that $\sigma''(u_x) \neq 0$, which means nonlinear oscillations of a bar. For this equation are found, all conservation laws of second order. These laws generate

¹Work is executed at financial support of the Ministry of education and science of the Russian Federation, on government order 2014/138, project No. 435.

nonlocal variables that determine nonlinear systems of differential equations equivalent to the equation (1). Using group classification received all models of these systems, with additional symmetries. Obtained all partially invariant solutions of these systems, including the cases in which systems have additional symmetries. The presence in the formulas of these decisions is an arbitrary constant and formulas of solutions production helps find solutions to the original equation, satisfying various boundary conditions. Using these solutions, the solutions are obtained that describe: 1) static deformation of the rod; 2) running wave and possible for the model considered generalizations of the traveling wave. Under some additional conditions established the existence and uniqueness of solutions of boundary value problems describing the longitudinal oscillations of the rod, one end of which at the initial moment of time specified either displacement, velocity and acceleration; or - displacement, speed, and deformation; or - displacement, speed and the deformation gradient; or - displacement, deformation and acceleration; or - displacement, strain and strain rates; or - displacement, strain and deformation gradient.

REFERENCES

1. Chirkunov Y.A Generalized equivalence transformations and group classification of systems of differential equations // go active. the fur. and technology. physical 2012. So 53 No. 2. C. 3-13.

SOME NONLOCAL PROBLEM FOR MIXED EQUATION WITH SECOND ORDER

Gurbanov P.

City Ashgabat, Turkmenistan;
pirligurban@mail.ru

Let D be the bounded domain that is, a connected region in the plane whose boundary consists of a smooth curve σ in the region where $y > 0$ which meets the x -axis in points $O(0, 0)$ and $A(1, 0)$ and the two characteristics $\{OC : x = 0\}$ and $\{AC : x - y = 1\}$ that issue from O and A .

Boundary value problem: *find a regular solution $u(x, t)$ to equation*

$$U_{xx} - \frac{1 - \operatorname{sgn} y}{2} U_{yy} - \frac{1 + \operatorname{sgn} y}{2} U_y + c(x, y) U = 0, \quad (x, y) \in D,$$

which satisfies the boundary conditions

$$U|_{\sigma} = \varphi(S), \quad S \in \sigma$$

$$U_x|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad (-1 \leq y \leq 0)$$

$$U\left(-\frac{y}{2}, \frac{y}{2}\right) = \alpha U\left(0, \frac{y}{2}\right) + \varphi_2(y), (-1 \leq y \leq 0)$$

where $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ and $\varphi(S), \varphi_1(y), \varphi_2(y)$ are given continuous functions.

In this work we investigate problems of existence and uniqueness of regular solutions for considered nonlocal problem for mixed equation with second order.

REFERENCES

1. A. N Kolmogorov, S V Fomin Elements of the theory of functions and functional analysis. M., 1976. (in russian)
2. A. V. Bitsadze Some classes of partial differential equations. M., Nauka, 1981. (in russian)
3. Y. S. Brodsky, A. K. Slipenko Functional equation. Kiev. 1983.(in russian)

ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

MODIFIED DIRICHLET PROBLEM FOR THE ELLIPTIC SYSTEM WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Абдрахманов А.М.

Уфимский Государственный Авиационный Технический Университет,
Уфа, Россия;
abdrai@mail.ru

Рассмотрим систему

$$-f(X)\Delta u_j + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(X) \neq 0$ в области $D = \{X : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < R^2\}$,
с границей Γ ; $f(X) < \lambda$, $X \in D$; $f(X) = \lambda$, $X \in \Gamma$; $\text{grad} \left(\frac{\lambda}{f(X)} - 1 \right) \neq 0$ для
 $X \in \Gamma$

1. $R^2 > \lambda$. Рассмотрим задачу Дирихле в следующей постановке: найти
регулярное в области D ограниченное решение системы (1), удовлетворяю-
щее на границе Γ условиям:

$$u_j|_{\Gamma} = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1; \quad f_j \in C^{2,\alpha}(\Gamma) \quad (2)$$

$$u_n|_{\delta\Gamma} = f_n : \quad f_n \in C^{1,\alpha}(\delta\Gamma) : \delta\Gamma = \{X \in \Gamma : x_n = 0\} \quad (3)$$

Доказана **теорема 1**: Задача Дирихле (1), (2), (3) разрешима и ее реше-
ние единственны в классе функций, ограниченных на бесконечности.

2. $R^2 < \lambda$. В этом случае к краевым условиям (2), (3) нужно добавить условие

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma} = f_{n+1}, \quad f_{n+1} \in C^{1,\alpha}(\Gamma) \quad (4)$$

Доказана теорема 2: Задача Дирихле (1), (2), (3), (4) разрешима и ее решение единствено в классе ограниченных функций.

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БУССИНЕСКА¹

ON THE SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SOME EQUATIONS OF BOUSSINESQ

Алсыкова А.А.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия;
888552@mail.ru

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox , Q - прямоугольник $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T , $f(x, t)$, $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ ($i = 1, 2$) заданные при $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$ функции.

Краевая задача I: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$Lu(x, t) \equiv u_{tt}(x, t) - u_{xxtt}(x, t) + a(x, t)u_{xx}(x, t) + b(x, t)u_x(x, t) + c(x, t)u(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняется условие

$$\begin{cases} u_x(0, t) = \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t), & 0 < t < 1, \\ u_x(1, t) = \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t), & 0 < t < 1, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \text{ при } x \in \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Краевая задача II: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (2), а также условие

$$\begin{cases} u(0, t) = \alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t), & 0 < t < 1, \\ u_x(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u(1, t), & 0 < t < 1. \end{cases}$$

¹Работа выполнена при поддержке гранта БГУ.

Краевая задача III: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (2), а также условие

$$\begin{cases} u(0, t) = \alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t), & 0 < t < 1, \\ u(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t), & 0 < t < 1. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. Kiguradze T. On the correctness of the Dirichlet problem in a characteristic rectangle for fourth order linear hyperbolic equations // Georgian Math. 1999. Т. 6, № 5. С. 447–470.
3. Уткина Е.А. Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2011. Т.47, №4. -С.400-404.
4. Пулькина Л. С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений: монография. Самара: Самарский университет, 2012.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА¹

RESEARCH OF SMOOTHNESS OF SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MIXED TYPE

Антипин В. И.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
antvasiv@mail.ru

Работа посвящена исследованию гладкости решений краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений вида

$$Bu_t - Au = f(x, t), \quad (1)$$

где A, B – линейные операторы, определенные в данном гильбертовом пространстве E . Оператор B необратим, в частности, он может иметь ненулевое ядро и спектр оператора B может содержать одновременно бесконечные подмножества положительной и отрицательной полуосей. Аналогичные краевые

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014–2016 гг. (проект № 3047)

задачи для уравнения (1) в случае, когда оператор B самосопряжен, оператор L удовлетворяет условию Като-секториальности, были рассмотрены в работе [1]. Сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности решений поставленной краевой задачи, а также изучен вопрос гладкости данных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пятков С.Г., Абашеева Н.Л. Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа // Сиб. мат. журн. 2000. Т.41, №6. С. 1419-1435.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

SOLVABILITY OF SOME NEW CHALLENGES FOR THE CONJUGATION OF NONCLASSICAL HIGHER ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Атласова Е. И.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
elena.131190@mail.ru

Работа посвящена исследованию разрешимости новых задач сопряжения для дифференциальных уравнений вида:

$$(-1)^{p-1} D_t^{2p} u - \Delta u + c(x, t) u = f(x, t), \quad (1)$$

в которых $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, $p > 1$, Δ – оператор Лапласа по пространственным переменным. Такие уравнения в случае $p = 1$ являются обычными гиперболическими уравнениями, в случае же $p > 1$ какого-либо названия они не имеют (иногда такие уравнения называют просто неклассическими дифференциальными уравнениями). Впервые предложил постановку краевой задачи для таких уравнений, изучил ее корректность В.Н. Врагов [2], ряд результатов о разрешимости краевых задач, о свойствах решений получили И.Е. Егоров и В.Е. Федоров [2]. Задачи сопряжения в случае $p > 1$ с условиями склейки по пространственным переменным изучались в [3]. Но задачи сопряжения с условиями склейки по временной переменной ранее не рассматривались.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Издательство ВЦ СО РАН, 1995.
2. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
3. Кожанов А. И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, не разрешенных относительно старшей производной // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35, № 2. С. 359–376.

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА**ON SOME SPECTRAL PROPERTIES OF A CLASS OF THE SECOND ORDER NONSELFADJOINT ELLIPTIC OPERATORS**

Гадоев М. Г.¹, Егоров И. Е.²

¹ Мирнинский политехнический институт (ф) СВФУ, Мирный, Россия;
gadoev@rambler.ru

² Научно-исследовательский институт математики СВФУ, Якутск,
Россия; piipmi@sitc.ru

Пусть $\Omega_0 \subset R^n$ – ограниченная область с границей класса C^∞ , а $S \subset \Omega_0$ – некоторое замкнутое подмногообразие коразмерности $\mu \in \{1, \dots, n\}$. Подмногообразием коразмерности n в R^n условимся считать множество состоящее из конечного числа точек. При $\mu \in \{1, \dots, n-1\}$ будем считать, что S – удовлетворяет условию конуса.

Положим $\Omega = \Omega_0 \setminus S$, $\rho(x) = \text{dist}\{x, S\}$. Рассмотрим пространство $H = W_{2,\alpha}^2(\Omega)$ состоящее из функций $v(x) (x \in \Omega)$ с конечной нормой

$$\|v\|_+ = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) |v'_{x_i}(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

В пространстве $L_2(\Omega)^l$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^{2\theta}(x) a_{ij}(x) q(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}).$$

Сформулируем условия для коэффициентов $q(x), a_{ij}(x)$ ($i, j = \overline{1, n}$).

Предположим, что $a_{ij}(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, $q(x) \in C^2(\bar{\Omega} : \text{End} \mathbb{C}^l)$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, ($x \in \Omega$, $i, j = \overline{1, n}$). Кроме того, предположим выполнение условия эллиптичности:

$$c|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\overline{\xi_j} \quad (x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{C}^n), c > 0.$$

За областью определения оператора A примем класс вектор - функций $u(x) \in L_2(\Omega)^l$ с компонентами класса $\overset{\circ}{H}^l(\Omega) \cap W_{2,loc}^2(\Omega)$ такие, что

$$\sum_{i,j=1}^n (\rho^{2\theta} a_{ij} qu'_{x_i})'_{x_j} \in L_2(\Omega)^l.$$

Здесь $\overset{\circ}{H}$ обозначает замыкание линейного многообразия $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве H .

Пусть $\Phi \subset \mathbb{C}$ – некоторый замкнутый сектор с вершиной в нуле. Обозначим через $\mu_1(x), \dots, \mu_l(x)$ собственные значения матрицы $q(x)$ и предположим, что $\mu_i(x) \neq \mu_j(x), \quad \mu_j(x) \in \mathbb{C} \setminus \Phi, (i, j = 1, \dots, l, x \in \bar{\Omega})$. При выполнении сформулированных выше условий имеет место следующая

Теорема 1. Для достаточно больших по модулю $\lambda \in \Phi$ оператор $A - \lambda E$ имеет непрерывный обратный $(A - \lambda E)^{-1}$ в пространстве $L_2(\Omega)^l$ и верная оценка

$$\|(A - \lambda E)^{-1}\| \leq M_\Phi |\lambda|^{-1} \quad (\lambda \in \Phi, |\lambda| \geq c).$$

Оператор A имеет дискретный спектр.

Сформулируем теперь основной результат работы заключающийся в нахождении асимптотики функции распределения собственных значений оператора A .

Пусть $\mu_1(x), \dots, \mu_\nu(x) \in R_+$, $\mu_{\nu+1}(x), \dots, \mu_l(x) \in \bar{R}_+$, $\forall x \in \bar{\Omega}$. Тогда ввиду того, что $\mu_i(x) \in C(\bar{\Omega})$ найдется число $\varphi \in (0, \pi)$ такое, что $|arg \mu_j(x)| > \varphi$ ($j = \nu + 1, \dots, l$). Обозначим через $N(t)$ число собственных значений оператора A расположенных в угле $\Phi = \{z \in \mathbb{C} : |arg z| \leq \varphi\}$ и не превосходящих по модулю числа t .

Теорема 2. Пусть $\alpha < \frac{\mu}{n}$. Тогда справедлива следующая асимптотическая формула

$$N(t) \sim (2\pi)^{-n} v_n t^{\frac{n}{2}} \int_{\Omega} \rho^{-n\alpha}(x) \mu(x) (det(a(x)))^{-1/2} dx,$$

$t \rightarrow +\infty$, где v_n – объем единичного шара в R^n ,

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \mu_i^{-\frac{n}{2}}(x), \quad a(x) = (a_{ij}(x))_{k,j=1}^n.$$

**ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА –
БИЦАДЗЕ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА В
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

**DIRICHLET PROBLEM FOR LAVRENTIEV - BITSADZE
EQUATION WITH TWO LINES OF TYPE IN RECTANGULAR
AREA**

Гималтдинова А. А.^{1,2}

¹ Поволжская государственная социально - гуманитарная академия,
Самара, Россия;

² Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
Стерлитамак, Россия;
alfiragimalthinova@mail.ru

Для уравнения смешанного типа

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0 \quad (1)$$

в области $D = \{(x, y) | -1 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$, изучается следующая задача Дирихле: найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4), \quad (2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4, \quad (3)$$

$$u(x, y)|_{x=1} = u(x, y)|_{x=-1} = 0, \quad y \in [-\alpha, \beta], \quad (4)$$

$$u(x, y)|_{y=\beta} = \varphi(x), \quad u(x, y)|_{y=-\alpha} = \psi(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (5)$$

где $D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_3 = D \cap \{x < 0, y < 0\}$, $D_4 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$, φ и ψ – заданные функции.

Многие авторы занимались изучением задачи Дирихле для уравнений смешанного типа с одной линией изменения типа (Франкль Ф.И., Шабат Б.В., Бицадзе А.В., Cannon J.R., Хачев М.М., Сабитов К.Б. и мн. др.). В работе [1] исследована задача Дирихле для уравнения смешанного типа с одной внутренней линией вырождения и методами спектрального анализа установлен критерий единственности и решение задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций.

В данной работе для уравнения (1) с двумя внутренними перпендикулярными линиями изменения типа изучена задача Дирихле в прямоугольной области.

После разделения переменных $u(x, y) = X(x)Y(y)$ относительно $X(x)$ получена следующая спектральная задача:

$$\operatorname{sgn} x \cdot X'' + dX = 0, \quad d = \mu^2 \in \mathbb{C},$$

$$X(0+0) = X(0-0), \quad X'(0+0) = X'(0-0), \quad X(1) = X(-1) = 0.$$

Собственные значения μ_k удовлетворяют уравнению $\operatorname{tg} \mu = -\operatorname{th} \mu$, при-
чем для положительных корней справедлива асимптотическая формула $\mu_k = -\pi/4 + \pi k + O(e^{-2\pi k})$, $k \in \mathbb{N}$, а собственные функции соответственно при $d_k^{(1)} = \mu_k^2 > 0$, $d_k^{(2)} = -\mu_k^2 < 0$ имеют вид:

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos \mu_k}, & x > 0, \\ \frac{\operatorname{sh}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch} \mu_k}, & x < 0, \end{cases} \quad X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch} \mu_k}, & x > 0, \\ \frac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos \mu_k}, & x < 0. \end{cases}$$

Система $\{X_k^{(1)}(x), X_k^{(2)}(x)\}$ не ортогональна в $L_2[-1, 1]$. Построена соот-
ветствующая биортогональная система функций:

$$Z_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{-\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos \mu_k}, & x > 0, \\ \frac{\operatorname{sh}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch} \mu_k}, & x < 0, \end{cases} \quad Z_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{-\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch} \mu_k}, & x > 0, \\ \frac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos \mu_k}, & x < 0. \end{cases}$$

Полнота системы $\{Z_k^{(1)}(x), Z_k^{(2)}(x)\}$ в $L_2[-1, 1]$ доказана аналогично [2].
Единственность решения задачи (2) – (5) доказана на основании полноты
биортогональной системы. При доказательстве существования решения за-
дачи (2) – (5) в виде суммы ряда возникла так называемая «проблема малых
знаменателей», которая создает трудности при обосновании сходимости по-
строенного ряда в классе функций (2). При определенных ограничениях на
параметры α, β доказаны леммы об отдельности малых знаменателей от
нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямо-
угольной области // ДАН. 2007. Т. 413. № 1. С. 23-26.
2. Ломов И. С. Негладкие собственные функции в задачах математической
физики // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 358-365.

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ БИОЛОГИЧЕСКИХ ПОПУЛЯЦИЙ

SOME MATHEMATICAL PROBLEMS OF THE BIOLOGICAL POPULATION DYNAMICS

Гусельников С. В.¹, Кожанов А. И.²

¹ Институт молекулярной и клеточной биологии СО РАН, Новосибирск,
Россия; sguselnikov@mcb.nsc.ru

² Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; kozhanov@math.nsc.ru

Среди задач динамики биологических популяций большой интерес представляют следующие:

- задача о существовании режимов с взрывным возрастанием численности особей в популяции, или же, наоборот, с резким уменьшением численности особей (задача о существовании режимов «с обострением»);
- задача о существовании периодических или близких к периодическим режимов;
- задача восстановления функций смертности и рождаемости в модели, описывающей динамику популяции;
- задача о свойствах популяции при неограниченном возрастании времени.

С математической точки зрения динамика биологических популяций описывается системой ультрапараболических уравнений, в которой имеются две временные переменные, представляющие собой астрономическое время t и биологическое время, или возраст, особи [1]. Описанные выше задачи в той или иной степени исследуются с помощью изучения свойств решений данной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.

**ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА**
HIERARCHY OF THIN INCLUSIONS IN ELASTIC BODIES

Джамалов С.З.

*Институт математики при Национальном университете Узбекистана,
Ташкент, Узбекистан;
siroj63@mail.ru*

Пусть Ω -ограниченная односвязная область в пространстве R^n с гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим $Q = \Omega \times (0, T) = \{(x, t) : x \in \Omega \subset R^n, 0 < t < T < +\infty\}$ -цилиндрическую область с боковой границей $S = \partial\Omega \times (0, T) = \{(x, t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$. В цилиндрической области Q рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu = Pu + Mu = f(x, t), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} Pu &= \sum_1^{2m} K_i(x, t) D_t^i u; \quad Mu = (-1)^m \sum_{|\alpha|+|\beta|=m} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) + a_0(x, t) u \\ D_t u &= \frac{\partial u}{\partial t}, \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i, m \geq 1. \end{aligned}$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области \overline{Q} и выполнены условия

$$a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta \geq \nu_0 |\xi|^{2m}, \quad \nu_0 > 0, \forall \xi \in R^n, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$$

и пусть $K_{2m}(x, 0) \leq 0 \leq K_{2m}(x, T)$. Уравнение относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K(x, t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений [1].

Нелокальная краевая задача. Найти обобщенное решение уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям

$$D_t^q u|_{t=0} = \gamma_q D_t^q u|_{t=T}, \quad q = 0, \dots, m-1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^q u}{\partial n^q}|_S = 0, \quad (3)$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i$$

$n = (n_0, n_1, \dots, n_n)$ вектор внутренней нормали. γ_q разные постоянные числа. Отметим, что задача (1) – (3) в случае, когда $m = 1$ изучена [2]. Разные локальные краевые задачи для уравнения смешанного типа высокого порядка изучены в работах [3,4]

В настоящей работе, при некоторых условиях на коэффициенты уравнения смешанного типа высокого порядка, доказывается корректность решения нелокальной краевой задачи (2), (3) из пространствах Соболева $W_2^{2m}(Q)$ методами ε -регуляризации и стационарным аналогом метода Галёркина

ЛИТЕРАТУРА

1. Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа высокого порядка. Матем. Анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск. Наука, 1978. с.5-13.
2. Джамалов С.З. О гладкости решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода в пространстве. ДАН РУз 2012г. №2. с.12-14
3. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск. 1985.
4. Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Учебное пособие. Новосибирск. НГУ. 1990. с.130.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

ON BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH SPECTRAL PARAMETER

Егоров И. Е.

Научно-исследовательский институт математики СВФУ, Якутск,
Россия;
IvanEgorov51@mail.ru

В цилиндрической области пространства R^{n+1} для уравнения смешанного типа второго порядка со спектральным параметром

$$Lu - \lambda u \equiv k(x, t)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x)u_{x_i}) + a(x, t)u_t + c(x)u - \lambda u = f$$

изучается краевая задача В.Н. Врагова [1-3].

При определенных условиях на коэффициенты уравнения установлены априорные оценки, которые позволяют доказать однозначную разрешимость

краевой задачи в энергетическом классе. Получены достаточные условия фредгольмовой разрешимости краевой задачи в энергетическом классе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
2. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент: Изд-во МУМТОЗ SO'Z, 2010.
3. Егоров И. Е. О фредгольмовой разрешимости одной краевой задачи для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 55–64.

О МОДИФИЦИРОВАННОМ МЕТОДЕ ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ¹

ON A MODIFIED GALERKIN METHOD FOR A SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH CHANGING DIRECTION OF TIME

Ефимова Е. С.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
OslamE@mail.ru

Пусть Ω - ограниченная область в R^n с гладкой границей S , $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$ для $0 \leq t \leq T$, $S_T = S \times (0, T)$.

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассматривается краевая задача. Ищется решение уравнение

$$Lu \equiv k(x, t)u_t - \Delta u + c(x, t)u + |u|^\rho u = f(x, t), \quad \rho > 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее краевым условиям:

$$u|_{S_T} = 0, \quad u|_{\overline{S}_0^+} = 0, \quad u|_{\overline{S}_T^-} = 0. \quad (2)$$

Пусть функции $\{\varphi_k(x, t)\}$ являются решением спектральной задачи

$$-\Delta \varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad x \in \Omega,$$

$$\varphi_k|_S = 0.$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014–2016 гг. (№ 3047).

Положим $L_\varepsilon u = Lu - \varepsilon u_{tt}$, $\varepsilon > 0$. Приближенные решения краевой задачи (1), (2) ищутся в виде

$$u^{N,\varepsilon}(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^{N,\varepsilon}(t) \varphi_k(x),$$

где $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ являются решением краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с соответствующими краевыми условиями в зависимости от поведения функции $k(x, t)$ на основаниях цилиндра [1, 2]. При определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения (1) получена оценка сходимости модифицированного метода Галеркина

$$\|u - u^{N,\varepsilon}\|_{1,0} \leq C(\varepsilon^{1/2} + \lambda_{N+1}^{-\alpha}), \quad C > 0, \quad \alpha > 0,$$

где $u(x, t)$ единственное регулярное решение краевой задачи (1), (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М: Наука, 1973.
2. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

ON SOLVABILITY OF NON-LOCAL PROBLEM FOR THE THIRD-ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS

Зикиров О. С.

Национальный университет Узбекистана имени М. Улугбека, Ташкент,
Узбекистан;
zikirov@yandex.ru

В работе для уравнения третьего порядка

$$Mu \equiv \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) u_{xy} + L_2 u = f(x, y), \quad (1)$$

где L – линейный оператор второго порядка вида

$$Lu \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u,$$

α, β – заданные действительные постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, изучается следующая нелокальная задача: требуется найти в области $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < y < h\}$ решение уравнения (1) удовлетворяющее начальным

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_y(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и нелокальным граничным условиям

$$u(0, y) = \lambda_1(y)u(l, y) + \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

$$u_x(0, y) = \lambda_2(y)u_x(l, y) + \lambda_3(y)u(0, y) + \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (4)$$

где $\psi_1(x), \psi_2(x), \varphi_1(y), \varphi_2(y), \lambda_1(y), \lambda_2(y), \lambda_3(y)$ – заданные функции, такие, что

$$\psi_1(0) = \lambda_1(0)\psi_1(l) + \varphi_1(0), \quad \psi_1'(0) = \lambda_2(0)\psi_1'(l) + \lambda_3(0)\psi_1(l) + \varphi_2(0).$$

Через $C^{k,l}(D)$ обозначен класс функций $u(x, y)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u(x, y)/\partial x^m\partial y^n$ для всех $m = 0, k, n = 0, l$.

Под классом $C^{(k,\lambda)}(D)$ понимаются определенные в области D функции, у которых все частные производные порядка k существуют и удовлетворяют условию Гельдера с показателем λ , $0 < \lambda < 1$. Решение класса $C^{2,1}(D) \cap C^{1,2}(D) \cap C^{1,1}(\overline{D})$ называется регулярным, и в этом случае будем требовать выполнения следующих условий:

Условие 1. Коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям

$$a(x, y) \in C^{1,0}(\overline{D}) \cap C^{2,0}(D); b(x, y) \in C^{1,0}(\overline{D}) \cap C^{0,1}(\overline{D}) \cap C^{1,1}(D);$$

$$c(x, y) \in C^{0,1}(\overline{D}) \cap C^{0,2}(D); d(x, y) \in C^{0,0}(\overline{D}) \cap C^{1,0}(D);$$

$$e(x, y) \in C^{0,0}(\overline{D}) \cap C^{0,1}(D); f(x, y) \in C^{0,0}(D),$$

кроме того, $d(x, y) < 0$, $e(x, y) < 0$ для любых $(x, y) \in D$.

Условие 2. Заданные функции $\psi_i(x)$, $\varphi_i(y)$, ($i = 1, 2$) и $\lambda_j(y)$, ($j = 1, 2, 3$) и $g(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$\psi_i(x) \in C^2[0, l], \quad \varphi_i(y), \quad \lambda_i(y) \in C^2[0, h], \quad (i = 1, 2);$$

$$g(x, y) \in C^{(1,\lambda)}(\overline{D}), \quad \text{кроме того } g(x, 0) = g(0, y) = 0.$$

Методом Римана доказана следующая теорема разрешимости задачи (1)–(4).

Теорема 1. Пусть выполнены условие 1 и условие 2. Тогда нелокальная задача (1)–(4) разрешима и притом единственным образом.

**НЕЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
ВЫРОЖДЕННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ**
**NONLINEAR INVERSE PROBLEM FOR A DEGENERATE
EVOLUTION EQUATION**

Иванова Н.Д.¹, Фёдоров В.Е.²

¹Южно-Уральский государственный университет, Челябинск,
Россия; natalia.d.ivanova@gmail.com

²Челябинский государственный университет, Челябинск,
Россия; kar@csu.ru

Пусть \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{U} – банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{U})$, $N : [0, T] \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$, $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{U}$, $x_0 \in D_M$. D_M – область определения оператора M , снабженная нормой графика $\|x_0\|_{D_M} = \|x_0\|_X + \|Mx_0\|_Y$. Рассмотрим нелинейную обратную задачу [1] для эволюционного уравнения

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + N(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$Px(0) = x_0, \quad (2)$$

$$\Phi x(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Здесь P – проектор вдоль ядра единицы разрешающей полугруппы уравнения $L\dot{x}(t) = Mx(t)$ на её образ. Функции $x : [0, T] \rightarrow \mathcal{X}$, $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{U}$ являются неизвестными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Слабым решением задачи (1)-(3) на отрезке $[0, T_1]$ называется такая пара функций $(x, u) \in C([0, T_1]; \mathcal{X}) \times C([0, T_1]; \mathcal{U})$, для которой при всех $t \in [0, T_1]$

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t)x_0 + \int_0^t X(t-s)L_1^{-1}QN(s, x(s), u(s))ds - \\ &\quad - M_0^{-1}(I-Q)N(t, x(t), u(t)), \end{aligned}$$

где $X(t)$ – разрешающая уравнение (1) полугруппа.

Теорема. Пусть оператор M сильно $(L, 0)$ -радиален [1], отображение $N : [0, T] \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ непрерывно по совокупности переменных, для всех $(t, x, u) \in [0, T] \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ $N(t, x, u) = N(t, Px, u)$, $x_0 \in \mathcal{X}^1$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{U})$, $\Phi L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{U})$, $\mathcal{X}^0 \subset \ker \Phi$, $\Psi \in C^1([0, T]; \mathcal{U})$, $\Phi u_0 = \Psi(0)$, отображение $g = L_1^{-1}QN : [0, T] \times \mathcal{X}^1 \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}^1$ представимо в виде $g(t, x, u) = g_1(t, x) + g_2(t, x, u)$, $y_0 = \Psi'(0) - \Phi L_1^{-1}M_1 x_0 - \Phi g_1(0, v_0)$ и выполнены условия:

(A) $u_0 \in \mathcal{U}$ – единственное решение уравнения $\Phi g_2(0, x_0, u) = y_0$;

(B) $\exists g_3 : [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$: $\Phi g_2(t, x, u) = g_3(t, \Phi x, u)$;

(C) $\exists R > 0: \forall t \in [0, T] y = g_3(t, \Psi(t), u)$ как функция от u в шаре $S_U(u_0, R)$ имеет обратное отображение $u = F(t, y)$;

(D) $\exists R > 0: F$ непрерывно относительно (t, y) на $S_U(y_0, R, T)$ и удовлетворяет условию Липшица относительно y ;

(E) $\exists R > 0: g_1(t, x)$ и $g_2(t, x, u)$ непрерывны по совокупности всех переменных на $S_{\chi^1 \times U}((x_0, u_0), R, T)$ и удовлетворяют условию Липшица относительно (x, u) .

Тогда существует единственное слабое решение обратной задачи (1)-(3) на $[0, T_1]$, $T_1 \in (0, T]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров В. Е., Иванова Н. Д. Нелинейная эволюционная обратная задача для некоторых уравнений соболевского типа // Сибирские электронные мат. известия. 2011. Т. 8. Труды второй международной школы-конференции. Ч. I. «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». С. 363–378. (<http://semr.math.nsc.ru/v8/c182-410.pdf>)

РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

A RADIALLY SYMMETRIC SOLUTION OF ONE INVERSE PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC EQUATION

Колтуновский О. А.

Южно-Сахалинский институт экономики, права и информатики,
Южно-Сахалинск, Россия;
natural_disc@sakhiepi.ru

Рассматривается редуцированная проблема (после замены переменных) для уравнения

$$u_{tt} - \psi(\rho)u_{\rho\rho} + q(\rho)u = f(\rho, t), \quad (1)$$

где

$$\psi(\rho) = \begin{cases} 4e^\rho, & n = 2, \\ 4 \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right) \rho \right]^{\frac{2n-2}{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

в полосе $D = \{(\rho, t) : 0 < \rho < \infty, 0 < t < T\}$.

Изучается обратная задача: найти функции $u(\rho, t)$ и $q(\rho)$, связанные в области D уравнением (1), и такие, что выполняются условия

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \quad u(\infty, t) = 0, \quad \text{если } 0 < t < T, \\ u(\rho, 0) &= u_0(\rho), \quad u_t(\rho, 0) = u_1(\rho), \quad u(\rho, T) = \bar{u}_0(\rho), \quad \text{если } 0 < \rho < \infty. \end{aligned}$$

О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

ON SOME INVERSE PROBLEMS FOR A LINEARIZED HEAT AND MASS TRANSFER SYSTEM

Короткова Е. М.^{1,2}

¹ АУ «Югорский НИИ информационных технологий, Ханты-Мансийск,
Россия;

² Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия;
kem@uriit.ru

Рассматривается линеаризованная система уравнений тепломассопереноса

$$u_t - \nu \Delta u + \nabla p = \sum_{j=1}^n B_j u_{x_j} + B_0 u + f + \beta_C C + \beta_\Theta \Theta, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (1)$$

$$\Theta_t - \lambda_\theta \Delta \Theta + \sum_{j=1}^n b_j \Theta_{x_j} + b_0 \Theta = f_\theta + \sum_{j=1}^n b^j u_j, \quad (2)$$

$$C_t - \sum_{i,j=1}^n c_{ij} C_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^n c_j C_{x_j} + c_0 C = f_c + \sum_{j=1}^n c^j u_j, \quad (3)$$

где $\nu = \text{const} > 0$, $(x, t) \in Q = G \times (0, T)$ ($G \subset \mathbb{R}^n$, $T < \infty$), u , Θ , p , C – вектор скорости, температура жидкости, давление, вектор концентраций примесей (органических или неорганических) в жидкости, и f_c – объемная плотность источников примесей, соответственно. B_j , B_0 – $n \times n$ матрицы, c_{ij} , c_j , c_0 – матрицы размерности $h \times h$, где h – это количество примесей, β_C – матрица размерности $n \times h$, c^j , β_Θ – вектор-функции длины h и n , соответственно, $\lambda_\theta > 0$, b_j , b^j – скалярные функции.

Система (1)-(3) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u|_S = g_1(t, x), \quad \Gamma = \partial G, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (4)$$

$$\Theta|_{t=0} = \Theta_0, \quad \Theta|_S = g_2(t, x), \quad C|_{t=0} = C_0, \quad C|_S = g_3(t, x). \quad (5)$$

Положим $x'' = (x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n)$ ($s = 0, 1, \dots, n-1$). Если $s \geq 1$, то положим $x' = (x_1, x_2, \dots, x_s)$. Предполагается, что правая часть в (3) известна в некоторой части области $Q' = G_1 \times (0, T)$ и неизвестна в области $Q'' =$

$G_0 \times (0, T)$ и может быть представима в виде $f_c = f_0(x, t) + \sum_{i=1}^r f_i(x, t)q_i(x', t)$, где $r = mh$, f_i ($i = 0, 1, \dots, r$) заданные функции, обращающиеся в ноль на Q' . Мы полагаем, что $G_0 \cap G_1 = \emptyset$ и $\overline{G_0 \cup G_1} = \overline{G}$.

Числовые функции $q_i(x', t)$ в данном представлении находятся с использованием условия переопределения:

$$C|_{S_i} = \psi_i(t, x') \quad (S_i = (0, T) \times \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, m), \quad (6)$$

где $\{\Gamma_i\}$ множество гладких s -размерных поверхностей, лежащих в G .

Обратные задачи такого типа возникают при описании тепломассопереноса, фильтрации, диффузии и некоторых других физических процессов. Задачи вида (1)-(6) для параболических уравнений рассматривались в [1], [2]. Среди последних статей отметим результаты в [3]-[4], где задачи вида (1)-(6) рассмотрены уже в случае параболических систем.

При условии, что G есть ограниченная область, указываются условия на геометрию области G и данные задачи, когда задача (1)-(6) имеет единственное решение из класса $u \in W_q^{2,1}(Q)$, $p \in L_q(0, T; \dot{W}_q^1(G))$ (здесь символ $\dot{W}_q^1(G)$ обозначает класс функций $p \in W_{q,loc}^1(G)$ таких, что $\nabla p \in L_q(G)$), $q_j \in L_q$ ($j = 1, 2, \dots, r$) в соответствующей области изменения переменных (x', t) , $\Theta, C \in W_q^{2,1}(Q)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 12-01-00260а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Belov Ya. Ya. Inverse problems for parabolic equations. // VSP, Utrecht. 2002.
2. Ivanchov M. Inverse problems for equation of parabolic type. // Math. Studies. Monograph Series. № 10. WNTL Publishers. Lviv. 2003.
3. Pyatkov S. G., Tsybikov B. N. On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations. // J. Evol. Equat. 2011. № 11. p. 155-186.
4. Pyatkov S. G., Samkov M. L. On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations. // Матем. Труды. 2012. № 15. С. 155-177.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

ON THE SOLVABILITY OF SOME LINEAR INVERSE PROBLEMS FOR ULTRAPARABOLIC EQUATIONS WITH UNKNOWN RIGHT-HAND SIDE

Кошелева Ю. А.

ФГБОУ ВПО "Сахалинский государственный университет",
Южно-Сахалинск, Россия;
yunuta@mail.ru

Работа посвящена исследованию разрешимости линейных обратных задач для нестационарных уравнений с неизвестными коэффициентами (неизвестным коэффициентом) временного типа.

Пусть x есть точка ограниченной области Ω пространства R^n , t и a есть точки интервалов $(0, T)$ и $(0, A)$ соответственно.

Рассматриваются задачи нахождения решения $u(x, t, a)$ и неизвестных коэффициентов $q_1(a), \dots, q_m(a)$ или же $q(a)$ в уравнениях

$$u_t + u_a - \Delta u + c(x, t, a)u = f(x, t, a) + \sum_{k=1}^m q_k(a)h_k(x, t, a),$$

$$u_t + u_a - \Delta u + c(x, t, a)u = f(x, t, a) + q(a)h(x, t, a),$$

при задании естественных начально-краевых условий, а также некоторых условий переопределения точечного или интегрального вида (количество условий переопределения совпадает с количеством неизвестных коэффициентов q_1, \dots, q_m , функции h_1, \dots, h_m здесь заданы и являются линейно независимыми).

Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Методы исследования основываются на сведении исходной обратной задачи к прямой задаче для «нагруженного» ультрапараболического уравнения, использовании метода регуляризации и метода априорных оценок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

DEFINITION OF FRACTAL PROPERTIES OF SOLID SURFACE

Кравчук А. С.¹, Попова Т. С.²

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь;
ask_belarus@inbox.ru

²ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия; ptsokt@mail.ru

В настоящее время идея фрактальности [1] широко применяется в исследованиях механики и физики шероховатой поверхности [2, 3]. Основной теоретической базой для исследований подобного рода являются: БПФ (быстрое преобразование Фурье), теоремы Лоренца о достаточных условиях принадлежности функции, представленной в виде ряда Фурье [4], классу функций $Lip \alpha$ ($0 < \alpha < 1$). В исследованиях физики шероховатой поверхности сложилась следующая практика применения указанных теоретических результатов: измеряется последовательность высот и далее, с помощью БПФ, вычисляется конечное число коэффициентов Фурье, по значению которых делается заключение о значении параметра α ($0 < \alpha < 1$) [4].

Целью данной работы является изучение математической достоверности выводов, сделанных по результатам измерений. Вопросы, связанные с достоверностью вычислений спектра с помощью БПФ, в данной работе не рассматривались. В ходе проведения исследований установлено, что значение параметра α по конечному отрезку ряда не может быть достоверно установлено. Это обусловлено тем, что в теоремах Лоренца параметр α используется для асимптотической оценки поведения коэффициентов, кроме того, эта оценка должна быть верна для бесконечного числа членов ряда [4], что не возможно определить экспериментально. Поэтому какие-либо заключения о величине α ($0 < \alpha < 1$) и соответственно принадлежности функции распределения высот шероховатости поверхности классу $Lip \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) являются только гипотезой. Кроме того, установлено, что существуют функции класса $Lip \alpha$ ($0 < \alpha < 1$), которые не являются фрактальными [5] (рекурсивными, воспроизводящими подобную геометрическую структуру на меньшем масштабном отрезке).

Таким образом, теоремы Лоренца [4] и вычисление спектра шероховатых поверхностей с помощью БПФ не являются достоверной математической базой, для определения фрактальных свойств шероховатости. В связи с этим предложена методика идентификации фрактальности шероховатой поверхности по результатам измерений, основанная на проверке геометрического подобия аддитивных компонент по результатам измерений и вычислений спектра и установлении на этой основе коэффициента фрактальности (подобия). Установлено, что структура приближения фрактальной функции с

помощью отрезка ряда Фурье должна иметь структуру аналогичную лакунарному ряду. Однако следует отметить, что и в этом случае экстраполяция вычисленного значения коэффициента фрактальности на бесконечное число аддитивных компонент также является лишь гипотезой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Москва: Фрактальная геометрия природы, 2002.
2. Greenwood J.A., Wu J.J. Surface Roughness and Contact: An Apology // Meccanica. 2001. N 36. P. 617-630.
3. Persson B.N.J. Elastoplastic Contact Between Randomly Rough Surfaces // Название журнала. Год. Т. 6, № 10. С. 6–10.
4. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. Москва: Физматлит, 1961.
5. Зигмунт А. Тригонометрические ряды. Вильно: Издательство университета, 1938.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ $(2m+1)$ -ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR $(2m+1)$ -PARABOLIC EQUATIONS

Лукина Г. А.

Политехнический институт (ф) СВФУ, Мирный, Россия;
lukina-g@mail.ru

Доклад посвящен изложению результатов о разрешимости нелокальных задач с условиями интегрального вида для уравнений

$$(-1)^{m+1} \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial t^{2m+1}} + \Delta u - \mu u = f(x, t)$$

$(x \in \Omega \subset R^n, 0 < t < T < +\infty, m \geq 1$ - целое). Суть рассматриваемых задач в том, что некоторые (возможно, даже все) естественные для данного класса уравнений условия, задаваемые при $t = 0$ и при $t = T$, заменяются условиями вида

$$\int_0^T K_i(t)u(x, t)dt = 0$$

(индекс i принимает одно из соответствующих значений набора $0, \dots, 2m-1$).

Для изучаемых задач доказываются теоремы существования регулярных решений.

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

BOUNDARY VALUE PROBLEM SOLVABILITY FOR HIGH ORDER MIXED TYPE EQUATIONS

Марков В. Г.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
bntr@rambler.ru

Рассматриваются краевые задачи для дифференциальных уравнений высокого порядка вида

$$u^{(2m+1)} + \sum_{i=0}^m u^{(i)} a_i(t) + Lu = f, \quad (x, t) \in Q = (a, b) \times (0, T), \quad (1)$$

где $u^{(i)} = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}$ и оператор L имеет вид $Lu \equiv \frac{1}{g(x)}(L_0 u + \lambda_0 u + Mu)$. Здесь L_0 — дифференциальный оператор по переменной x вида $L_0 u = \sum_{i=0}^{2s} \alpha_i(x) u^{(i)}$ и M его возмущение, имеющее вид $Mu = \sum_{i=0}^{2s-1} b_i(x, t) u^{(i)}$.

Дополним уравнение (1) краевыми условиями

$$\sum_{k=0}^{2s-1} \alpha_{jk} \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(a, T) + \sum_{k=0}^{2s-1} \beta_{jk} \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(b, T) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2s, \quad (2)$$

$$u^{(i)}(x, 0) = u^{(i)}(x, T), \quad (3)$$

где α_{jk}, β_{jk} — некоторые комплексные постоянные.

Функция $g(x)$ может обращаться в 0 и менять знак на отрезке (a, b) . В частности, при $m = 0$ получаются параболические уравнения с меняющимся направлением времени, которые достаточно хорошо изучены [1,2].

В работе рассматриваются вопросы однозначной разрешимости краевой задачи (1) – (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. Неклассические операторно-дифференциальные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
3. Pyatkov S. G. Operator theory. Nonclassical problems. VSP: Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, 2002.

**ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**
**ON INVERSE PROBLEMS FOR SOME DIFFERENTIAL
EQUATIONS**

Намсараева Г. В.

*ФГБОУ ВПО "Восточно-Сибирский государственный университет
технологий и управления", г. Улан-Удэ, Россия;
gerel@inbox.ru*

Работа посвящена исследованию разрешимости линейных обратных задач для некоторых неклассических дифференциальных уравнений, моделирующих, в частности, уравнение Буссинеска-Лява, возникающее при описании продольных волн в стержнях, в теории длинных волн, в физике плазмы [1].

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи, в которых наряду с нахождением решения требуется отыскать входные данные, например коэффициенты уравнения или функции, определяющие начальные или граничные условия. Обратным задачам посвящены монографии Прилепко А.И., Аниконова Ю.Е., Кожанова А.И. и многие другие работы [2-4].

Пусть Ω есть интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q - прямоугольник $\{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, T), 0 < T < \infty\}$. Далее пусть $f(x, t), a(x, t), c(x, t), h(x, t), K(x, t), N(x, t)$ - заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}, t \in [0, T]$.

Обратная задача I: найти функции $u(x, t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_{tt} + a(x, t)u_{xx} - u_{xxtt} + c(x, t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (4)$$

Обратная задача II: найти функции $u(x, t)$, $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (1), при выполнении для функции $u(x, t)$ условий (3), а также условий

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (6)$$

Обратная задача III: найти функции $u(x, t)$, $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (1), при выполнении для функции $u(x, t)$ условий (2) и (3), а также условия

$$\int_0^1 K(x, t)u(x, t)dx = 0, \quad 0 < t < T. \quad (7)$$

Обратные задачи I-III относятся к классу обратных задач временного типа. Подобные задачи для уравнения (1) ранее не изучались, отметим лишь, что в [5] изучалась нелинейная обратная задача для уравнения Буссинеска-Лява в некотором специальном случае.

В работе сформулированы теоремы разрешимости задач I-III. Для доказательства существования регулярных решений используются различные подходы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. - М.: Физматлит, 2001. С. 58-65.
2. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, Basel: Marcell Dekker Inc., 2000.
3. Anikonov Yu.E. Inverse and Ill-Posed Problems. Utrecht: VSP, 1997.
4. Кожанов А.И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником”, Матем. заметки, 1999. - Т. 65, № 1. С. 70-75.
5. Мегралиев Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для уравнения Бусинеска-Лява. Журнал СФУ. Сер. Математика и физика. 2012. Т. 6. Вып. 4. 485-494.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

INVESTIGATION OF THE SOLVABILITY OF THE INVERSE PROBLEM FOR ONE EQUATION OF THIRD ORDER

Николаев Н. Н.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
niknik-90@sbras.ru

Обратные задачи для параболических уравнений высокого порядка в последние годы все больше привлекают внимание многих исследований. Заметим, что если прямые пространственно нелокальные краевые задачи для

уравнений третьего порядка хорошо изучены [1], то обратные задачи для таких уравнений изучены сравнительно мало. Отметим работы, в которых неизвестный параметр зависит от временной переменной, рассматривались в случаях параболических [2] и гиперболических [3] уравнений.

Пусть Ω есть интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q есть прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$. Далее, пусть $f(x, t), c(x, t), h(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$. Требуется найти функции $u(x, t), q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{ttt} + u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ краевых условий

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (3)$$

и начальных условий

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Разрешимость обратной краевой задачи (1) – (4) проводится сведением к пространственно нелокальной краевой задаче для "нагруженного" [4] уравнения вида

$$\begin{aligned} v_{ttt} + v_{xx} + c(t)v &= f_{1xx}(x, t) + h_{1xx}(x, t)v(0, t), \\ f_1(x, t) &= f(x, t) - \frac{f(0, t)h(x, t)}{h(0, t)}, \quad h_1(x, t) = \frac{h(x, t)}{h(0, t)} \end{aligned} \quad (5)$$

с помощью метода продолжения по параметру и априорных оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукина Г. А. О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для уравнения третьего порядка // Математические заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып.1. С. 35–46.
2. Телешева Л. А. О разрешимости линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 2. С. 186–196.
3. Павлов С. С. Обратная задача восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении с интегральным переопределением // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 81–93.
4. Кожанов А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 6. С. 840–853.

**ИНТЕГРАЛЫ ТИПА ЭЙЛЕРА ДЛЯ
ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ $F_8^{(4)}$**

**INTEGRALS OF EULER TYPE FOR THE HYPERGEOMETRIC
FUNCTION $F_8^{(4)}$**

Новицкая А.Н.

*Акмолинский региональный государственный университет, Актобе,
Казахстан;
nannanovitskaya@mail.ru*

Разнообразие прикладных задач, приводящих к гипергеометрическим функциям, вызвало быстрый рост числа функций, применяемых в приложениях. Например, в монографии [1] определены и изучены области сходимости 205 гипергеометрических функций от трех переменных. В этой монографии также можно найти ссылки на научные работы до 1985 года, посвященных изучению свойств гипергеометрических функций. Поскольку число гипергеометрических функций велико, полное множество их преобразований исчисляется сотнями. Лучшим средством для вывода преобразований являются интегральные представления типа Эйлера рассматриваемых функций. В данном докладе для гипергеометрической функции от четырех переменных $F_8^{(4)}$ [2]:

$$F_8^{(4)} (a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t) =$$

$$= \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n} (a_2)_{p+q} (b_1)_{m+p} (b_2)_n (b_3)_q}{(c_1)_m (c_2)_n (c_3)_p (c_4)_q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

доказываются несколько интегральных представлений типа Эйлера. Найденные интегральные представления для более простых гипергеометрических функций, рассмотрены в работах [3-4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Srivastava H. M., Karlsson P. W. Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), Wiley, New York, Chichester, Brisbane and Toronto, 1985. 427 p.
2. Sharma C., Parihar C. L. Hypergeometric functions of four variables // Indian Acad. Math. 1989. № 11. P. 121–133.
3. Choi J., Hasanova A., Turaev M. Integral Representations for Srivastava's Hypergeometric Functions // Honam Mathematical J. 2012. Т. 34, № 4. P. 473–482.
4. Choi J., Hasanova A., Srivastava H. M. Relations between Lauricella's triple hypergeometric function and the Srivastava function // Integral Transforms and Special Functions. Vol. January 2012. Т. 34, № 1. P. 69–82.

**КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ
ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ**

**THE INVERSE PROBLEM FOR NONCLASSICAL HIGHER
ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INTEGRAL
REDEFINITION**

Павлов С. С.

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
ststepmath@mail.ru*

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n с гладкой границей Γ , $S = \Gamma \times (0, T)$, Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$. Далее, пусть $f(x, t)$, $c(x, t)$, $h(x, t)$, $K(x, t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, m – заданное положительное целое число.

Обратная задача: найти функции $u(x, t)$, $q(t)$, связанные уравнением

$$(-1)^{m-1} D_t^{2m} u - \Delta u + c(x, t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$\begin{aligned} D_t^i u(x, 0) &= 0, \quad i = \overline{0, m}, \\ D_t^j u_t(x, T) &= 0, \quad j = \overline{1, m-1}, \end{aligned} \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_S = 0, \quad (3)$$

а также условия переопределения

$$\int_{\Omega} K(x, t)u(x, t)dx = 0. \quad (4)$$

Обратные задачи (1) – (4) при $m = 1$ исследованы в работе [1]. Решение поставленной обратной задачи будем искать в пространстве

$$V = \{u(x, t) : u(x, t) \in W_2^2(Q) \cap L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega)), \quad D_t^{2m} u \in L_2(Q)\}.$$

Теорема. Пусть выполняются условия

$$f(x, t), \quad h(x, t) \in L_2(Q), \quad f_{x_i}(x, t) \in L_2(Q), \quad \int_{\Omega} K(x, t)h(x, t)dx \neq 0$$

$$f(x, t)|_S = h(x, t)|_S = 0, \quad K(x, t) \in C^4(\bar{Q})$$

Тогда существует функция $u(x, t)$ такая, что $u(x, t), \Delta u(x, t) \in V$ и функция $q(t)$ из пространства $L_2([0, T])$, являющиеся решением обратной задачи (1)-(4).

Доказательство теоремы основано на переходе от обратной задачи к прямой краевой задаче для нового "нагруженного" линейного уравнения [2] с последующим применением методов регуляризации [3] и продолжения по параметру.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов С. С. Обратная задача восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении с интегральным переопределением // Математические заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, Вып. 1. С. 81–93.
1. Кожанов А. И. Обратная задача определения коэффициента поглощения в одномерном уравнении нелинейной диффузии // Матем. заметки ЯГУ. 2008. Т. 15, Вып.2. С. 31–47.
3. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Издательство ВЦ СО РАН, 1995.-131 с.

О ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

ABOUT THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE DEGENERATING THE PARABOLIC EQUATIONS WITH THE CHANGING DIRECTION TIME

Петрушко И. М.

Московский энергетический институт, Москва, Россия;
petrushko@mail.ru

Пусть Q - ограниченная область n -мерного пространства R_n , граница которого ∂Q – $(n - 1)$ мерная поверхность без края класса C^2 .

Рассмотрим в цилиндрической области $Q^T = Q \times (0, T)$ уравнение

$$Lu = k(x)u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{i,j}u_{x_i})_{x_j} + au = f(x, t). \quad (1)$$

Предположим, что коэффициенты $a_{i,j}(x, t)$ достаточно гладкие функции и удовлетворяют условиям: для любой точки $x \in Q_\delta$, $\delta \in (0, \delta_0)$ и для любых $t \in [0, T]$ существует такая постоянная $\gamma_\delta > 0$, $\gamma_\delta \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, что для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R_n$, $\Phi(x, \xi, t) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq \gamma_\delta |\xi|^2$.

Для $(x_0, t) \in \partial Q \times [0, T]$ квадратичная форма вырождается. Однако, будем предполагать что существует такая постоянная $\gamma^0 > 0$, что для всех $x_0 \in \partial Q, t \in [0, T]$

$$\gamma^0 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x, t) \nu_i(x_0) \nu_j(x_0) \leq (\gamma^0)^{-1},$$

где $\nu(x_0)$ - вектор внешней, по отношению к области Q единичной нормали к поверхности ∂Q в точке x_0 .

Положим $Q^+ = \{x \in Q, k(x) > 0\}; Q^- = \{x \in Q, k(x) < 0\}$. Правую часть $f(x, t)$ уравнения (1)

будем предполагать принадлежащей пространству $L_2(Q^T)$.

Будем говорить, что функция $u(x, t)$ принимает граничное значение

$$u|_{(x,t) \in (Q \times (0,T))} = \varphi \quad (2)$$

в смысле $L_p, p > 1$, если $\varphi(x, t) \in L_p(\partial Q \times (0, T))$ и

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \int_{\beta}^{T-\beta} \int_{\partial Q} |u(x_\delta(x), t) - \phi(x, t)|^2 ds dt = 0 \quad (2')$$

Будем также говорить, что функция $u(x, t) \in W_{2,loc}^{2,1}(Q^T)$ принимает граничные значения

$$u|_{t=0, x \in Q^+} = u_1(x), \int_{Q^+} u_1^2(x) r(x) dx < \infty \quad (3)$$

$$u|_{t=0, x \in Q^-} = u_2(x), \int_{Q^-} u_2^2(x) r(x) dx < \infty, \quad (4)$$

если

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \int_{Q_\delta^+} (u(x, \beta) - u_1(x, t))^2 r(x) dx = 0 \quad (3')$$

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \int_{Q_\delta^-} (u(x, T - \beta) - u_2(x, t))^2 r(x) dx = 0 \quad (4')$$

Справедливы теоремы.

Теорема 1. Существует такая постоянная $a_0 > 0$, что для всех $\varphi(x, t) \in L_p(\partial Q \times (0, T)), u_1(x) \in L_2(Q^+, r), u_2(x) \in L_2(Q^-, r)$ и для всех $f(x, t) \in L_2(Q^T)$ существует решение из $W_{2,loc}^{2,1}(Q^T)$ задачи (1)-(4) при $a(x, t) > a_0$. Это решение единственno и для него справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} u_i u_j r(x) dx dt + \sup_{\beta, \delta} \left(\int_{Q_\delta^+} u^2(x, T - \beta) (r - \delta) dx + \right. \\ & \left. + \int_{Q_\delta^-} u^2(x, \beta) (r - \delta) dx \right) \leq C \|f\|_{L_2(Q^T)}^2 + \|\phi\|_{L_2(\partial Q \times (0, T))}^2 + \\ & \|u_1\|_{L_2(Q_\delta^+, r(x))}^2 + \|u_2\|_{L_2(Q_\delta^-, r(x))}^2. \end{aligned}$$

Теорема 2. Если функция $u(x, t)$ является обобщенным из $W_{2,loc}^{2,1}(Q^T)$ решением задачи (1)–(4) с $a(x, t) > a_0$, то существуют такие функции $u_3(x) \in L_2(Q^+, r)$, $u_4(x) \in L_2(Q^-, r)$, что

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \int_{Q_\delta^+} (u(x, T - \beta) - u_3(x, t))^2 (r(x) - \delta) dx = 0$$
$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \int_{Q_\delta^-} (u(x, \beta) - u_4(x, t))^2 (r(x) - \delta) dx = 0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск. НАука, 1985.
2. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Введение в теорию уравнений смешанного типа второго порядка. Якутск; ЯГУ, 1998.
3. Пятков С.Г. О разрешимости одной для параболического уравнения с меняющимся направлением времени. ДАН СССР. 1985. Е.285. №6, С.1322-1327.
4. Петрушко И.М., Черных Е.В. О начально-краевой задаче для уравнений с меняющимся направлением времени. Вестник МЭИ. 2000. №6, С. 60-70.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА¹

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A CLASS OF EQUATION OF COMPOSITE TYPE HIGH ORDER

Пинигина Н. Р.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
n-pinig@mail.ru

Изучается разрешимость краевых и начально-краевых задач для некоторых классов уравнений составного типа высокого порядка. Для рассматриваемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $a^{ij,k}(x)$, $a^{0,k}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, 2p$ ($p > 1$ – целое), $\alpha_l(t)$, $l = 1, \dots, 2p - 1$, $f(x, t)$ – заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$,

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект №3047).

$t \in [0, T]$. Далее, пусть A_k , $k = 0, \dots, 2p$, есть дифференциальные операторы, действие которых определяется равенствами

$$A_k v = \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij,k}(x) v_{x_j}) + a^{0,k}(x) v$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n), причем операторы $-A_0$ и A_{2p} являются эллиптическими в $\bar{\Omega}$. Через D_t^l далее будем обозначать производную $\frac{\partial^l}{\partial t^l}$, через L – дифференциальный оператор

$$Lu = (-1)^{p+1} D_t^{2p} A_0 u + \sum_{k=1}^{2p-1} \alpha_k(t) D_t^{2p-k} A_k u - A_{2p} u.$$

Краевая задача I_p: найти решение уравнения

$$Lu = f(x, t), \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, t) |_{S} = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = \dots = D_t^p u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u_t(x, T) = \dots = D_t^{p-1} u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Краевая задача II_p: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3), а также условию

$$D_t^{p+1} u(x, T) = \dots = D_t^{2p-1} u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Краевая задача III_p: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3), а также условию

$$D_t^{p+1} u(x, 0) = \dots = D_t^{2p-1} u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Заметим, что в случае $p = 1$ уравнение (1) представляет собой уравнение составного типа, моделирующее известное уравнение Буссинеска–Лява [1], краевые задачи I_p, II_p и III_p для такого уравнения совпадают и исследование их разрешимости было проведено ранее (см. [2]). В случае $p > 1$ краевая задача I_p восходит по своей постановке к работам [2–4], в которых изучалась подобная задача для неклассических уравнений вида (1) в случае $A_k = I$, $k = 0, 1, \dots, 2p - 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, неразрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
3. Врагов В. Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Матем. анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 5–13.
4. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ С НЕМОНОТОННОЙ НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ИЛИ НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS ON NON-MONOTONIC NON-CYLINDRICAL DOMAINS OR DOMAINS WITH UNKNOWN BOUNDARY

Подгаев А. Г., Лисенков К. В.

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия;
podgaev@mail.khstu.ru

Исследуется существование регулярных решений для квазилинейных параболических уравнений в нецилиндрической области с заданной границей класса W_2^1 в случае одной пространственной переменной [1] или с границей класса $C_{x,t}^{2,1}$ в многомерном случае [2]. При этом не предполагается монотонность границы. Допускается вырождение уравнения.

Представлены также результаты исследования задачи Стефана, когда часть границы неизвестна и находится вместе с решением. [3]

Для случая заданной границы приближенные решения строятся проекционным методом с использованием семейства проекторов зависящих от временного параметра. Доказывается, что некоторый предел этих решений будет решением задачи.

Для обоснования существования предела в одномерном случае используются методы компактности множества функций из шкалы банаховых пространств.

В случае п переменных развивается метод монотонности на случай нецилиндрических областей.

Одномерная задача для случая монотонной границы класса W_2^1 рассматривалась в [4].

В одномерном случае рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(u_x) + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t)u.$$

При допущении довольно произвольного вырождения ($\varphi' > 0$) для заданной необязательно монотонной границы $x = s(t) \in W_2^1(0, T)$ установлены теоремы существования. Предполагается, что отрезок $[0, T]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых $s'(t) \geq 0 \dots s'(t) \leq 0$ п.в. Случай $s(T)=0$ допустим.

В многомерном случае с границей класса $C_{x,t}^{2,1}$ изучено уравнение

$$u_t = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(u_{x_i}) + f$$

в нецилиндрической области $\bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Omega_t = Q_T$. Обосновано существование и единственность решения первой начально-краевой задачи. Показано, какие изменения можно внести в метод монотонности, чтобы он «работал» в нестационарном случае нецилиндрических областей (основное неравенство выводится существенно более долгим путем).

ЛИТЕРАТУРА

1. Подгаев А.Г., Лисенков К.В. Разрешимость квазилинейного параболического уравнения в области с кусочно-монотонной границей//Дальневосточный математический журнал. 2013. Т.13. №2.
2. Подгаев А.Г., Истомина Н.Е. Истомина Н.Е. О методах Фаэдо - Галеркина и монотонности в нецилиндрической области для вырождающегося квазилинейного уравнения// Дальневосточный математический журнал. 2014. Т.14. №1.
3. Подгаев А.Г. Краевые задачи и задачи управления для вырождающихся параболических уравнений в областях с нецилиндрической или неизвестной границей //Научное обеспечение технического и социального развития Дальневосточного региона: сб. науч. ст. к 55-летию Тихоокеан. гос. ун-та. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013.
4. Лисенков К.В. Проекционный метод решения задачи для квазилинейного параболического уравнения в нецилиндрической области с границей класса W_2^1 // Дальневосточный математический журнал. Т. 12, №1, 2012. С.48-59.

**О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО
ПОРЯДКА**

**ON THE SOLVABILITY OF NONLOCAL BOUNDARY VALUE
PROBLEMS FOR NONCLASSICAL EQUATIONS OF THIRD
ORDER**

Попов Н. С.

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.
Аммосова", Якутск, Россия;
popovnserg@mail.ru*

Рассматриваются пространственно нелокальные краевые задачи для линейных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений третьего порядка с граничными условиями А.А. Самарского с переменными коэффициентами и с граничными условиями интегрального вида. Исследованию подобных нелокальных краевых задач для параболических и гиперболических уравнений посвящены работы [1,2].

Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с гладкой границей Γ , $Q = \Omega \times (0, T)$ ($0 < T < +\infty$), $S = \Gamma \times (0, T)$, $f(x, t)$ — заданная в цилиндре \bar{Q} функция, $u_0(x), u_1(x)$ — заданные на множестве $\bar{\Omega}$ функции, $K(x, y, t)$ — функция, заданная при $x, y \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, γ, α — постоянные числа.

Краевая задача I. Найти функцию $u(x, t)$ являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - \Delta u_t + \gamma u = f(x, t), \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t)dy|_{(x,t) \in S}. \quad (3)$$

Метод продолжения по параметру и априорных оценок для многомерных псевдопараболических уравнений эффективно использовалась в работе [3]. В настоящей работе методом Фурье доказывается разрешимость поставленной краевой задачи I.

В одномерном случае рассматриваются уравнения

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - u_{xxt} = f(x, t), \quad (4)$$

$$u_t - \alpha u_{xx} - u_{xxt} = f(x, t) \quad (5)$$

с общими пространственно нелокальными краевыми условиями

$$\begin{aligned} & a_{11}(t)u_x(0, t) + a_{12}(t)u_x(1, t) + b_{11}(t)u(0, t) + \\ & + b_{12}(t)u(1, t) + \int_0^1 K_1(x, t)u(x, t) dx = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & a_{21}(t)u_x(0, t) + a_{22}(t)u_x(0, t) + b_{21}(t)u(0, t) + \\ & + b_{22}(t)u(1, t) + \int_0^1 K_2(x, t)u(x, t) dx = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Краевая задача II. Найти функцию $u(x, t)$ являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (4) и такую, что для нее выполняются краевые условия (6), (7), а также начальные условия (2).

Краевая задача III. Найти функцию $u(x, t)$ являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (5) и такую, что для нее выполняются краевые условия (6), (7), а также начальные условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

Метод продолжения по параметру и априорных оценок для многомерных псевдопараболических уравнений использовалась в работе [3]. В настоящей работе методом Фурье доказывается разрешимость поставленных краевых задач II, III.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожанов А. И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 2008. № 3(62). С. 165–174.
2. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1116–1172.
3. Полопов Н. С. О разрешимости краевых задач для многомерных псевдопараболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, № 1. С. 82–95.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ¹

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH CHANGING TIME DIRECTION

Попов С. В.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.
Аммосова", Якутск, Россия;
madu@ysu.ru

Рассматриваются параболические уравнения второго и четвертого порядков с меняющимся направлением времени с условиями склеивания с переменными коэффициентами по $t \in [0, T]$.

В работах [1,2] явно представлены условия разрешимости для краевых задач для параболических уравнений второго и четвертого порядков с меняющимся направлением времени. При этом для доказательства $[p]$ -разрешимости при $n = 2$ были рассмотрены общие диагональные условия склеивания с постоянными коэффициентами, более того, были найдены зависимости показателей гельдеровских пространств от весовых функций склеивания.

В настоящей работе устанавливается разрешимость краевых задач в пространствах Гельдера для уравнений

$$\operatorname{sgn} x u_t = u_{xx}, \quad \operatorname{sgn} x u_t + u_{xxxx} = 0.$$

Показано, что гельдеровские классы их решений зависят как от нецелого показателя Гельдера, так и от коэффициентов условий склеивания, заданных на интервале $[0, T]$ при выполнении необходимых и достаточных условий на входные данные задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
2. Попов С. В. О гладкости решений параболических уравнений сменяющимся направлением эволюции // Доклады Академии Наук. 2005. Т. 400, № 1. С. 29–31.

¹ Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014–2016 гг. (проект №3047).

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ¹

ABOUT ONE CONJUGATION PROBLEM FOR THE THIRD ORDER EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

Потапова С. В.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
sargyp@mail.ru

В работе исследуется разрешимость одной задачи сопряжения для неклассического дифференциального уравнения вида

$$u_t - h(x)u_{xxx} + c(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

здесь $x \in (-1, 1)$, $t \in (0, T)$, функция $h(x)$ такова, что она может иметь разрыв первого рода в точке $x = 0$ и $h(x) > 0$ при $x \in [-1, 0]$, $h(x) > 0$ при $x \in [0, 1]$, $h(x) \in C([-1, 0])$, $h(x) \in C([0, 1])$.

Краевая задача: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве $(-1, 1) \setminus 0 \times (0, T)$ решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются граничные условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (2)$$

$$u(-1, t) = u_x(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

а также условия сопряжения

$$u(+0, t) = \alpha u(-0, t), \quad 0 < t < T, \quad (4)$$

$$u_x(+0, t) = \beta u_x(-0, t), \quad 0 < t < T, \quad (5)$$

$$u_{xx}(-0, t) = \gamma u_{xx}(+0, t), \quad 0 < t < T, \quad (6)$$

где α, β, γ - заданные действительные числа.

Уравнения (1) называют уравнениями с кратными характеристиками [1]. Разрешимость тех или иных краевых задач для подобных уравнений с непрерывными коэффициентами изучена достаточно хорошо [1]-[3], в случае же разрывных коэффициентов отметим работы [1] и [4].

Методом регуляризации и методом продолжения по параметру для изучаемой задачи доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений.

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014-2016 гг. (проект №3047).

ЛИТЕРАТУРА

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1986.
2. Хаблов В. В. О некоторых корректных постановках граничных задач для уравнения Кортевега де Фриза. Препринт Ин-та матем. СО АН СССР. Новосибирск, 1979.
3. Абдрахманов А. М., Кожанов А. И. Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка. Изв. вузов. Матем., 2007, № 5, С. 3-12.
4. Антипов В. И. Разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени. Математические заметки ЯГУ, 2011, Т.18, № 1, С. 8-15.

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATION

Прокопьев А. В.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
prokorevav85@gmail.com

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ , $S = \Gamma \times (0, T)$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, x_1, \dots, x_m — заданные различные точки из Ω . В области Q рассматривается обратная задача нахождения функций $u(x, t)$, $q_1(t), \dots, q_m(t)$, связанных уравнением

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij}(x) u_{x_j} \right) + a(x)u = f(x, t) + \sum_{k=1}^m q_k(t) h_k(x, t), \quad (1)$$

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

с начальным и граничным условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_S = 0, \quad (2)$$

а также условиями переопределения

$$u(x_k, t) = \psi_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Методом регуляризации доказывается существование обобщенного решения обратной задачи (1) – (3) (см.[1,2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Прокопьев А. В. Линейная обратная задача для эллиптико-параболического уравнения // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, Вып.2. С. 163–179.
2. Павлов С. С. Разрешимость обратной задачи восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении // Вестник Челябинского государственного университета. Математика, Механика, Информатика, 2011. Вып.13. С. 27–37.

КРИТЕРИЙ *H*-СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ CRITERION OF *H*-PROPERTY OF FUNCTIONALES

Прудников В.Я.

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия;
prudnickov.vit@yandex.ru

В теории нелинейных некорректных задач важную роль играет понятие *H*-свойства функционалов (см., например, работы [1-3] и имеющуюся в них библиографию). Пусть X – банахово пространство. На непустом множестве $K \subset X$ определим функционал F .

Определение [3]. Функционал F имеет на K *H*-свойство, если для любой последовательности $\{u_n\} \subset K$ из её слабой сходимости к пределу $u_o \in K$ и сходимости по функционалу F следует сильная сходимость. В вышеупомянутых работах приведены достаточные условия на интегральные функционалы F , при выполнении которых F обладают *H*-свойством в пространствах Лебега и Соболева. В данном докладе представлен критерий *H*-свойства функционала в достаточно общих функциональных пространствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов А. С. Обобщение метода максимальной энтропии для решения некорректных задач // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41, №4. С. 863-872.
2. Леонов А. С. Регуляризующие функционалы общего вида для решения некорректных задач в пространствах Лебега // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44, №6. С. 1295-1309.
3. Леонов А. С. Об *H*-свойстве функционалов в пространствах Соболева // Матем. заметки. 2005. Т. 77, №3. С. 378-394.

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА
NONLINEAR INVERSE PROBLEMS FOR THE SECOND ORDER
HYPERBOLIC EQUATION**

Сафиуллова Р. Р.

*Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
Стерлитамак, Россия;
regina-saf@yandex.ru*

Для уравнений гиперболического типа второго порядка исследуется разрешимость некоторых задач нахождения вместе с решением $u(x, t)$ дополнительной неизвестной функции, зависящей от t .

Пусть D есть интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q есть прямоугольник $D \times (0, T)$ конечной высоты T , x есть точка области D , t есть точка интервала $(0, T)$. Далее, пусть $a(x, t)$, $f(x, t)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ есть заданные функции, определенные при $x \in D$, $t \in [0, T]$.

Обратная задача I: найти функции $u(x, t)$, $q(t)$, связанные в Q уравнением

$$u_{tt} - u_{xx} + a(x, t)u_t + q(t)u = f(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ начальных условий

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in D, \quad (2)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in D, \quad (3)$$

границых условий

$$u_x(0, t) = \varphi_1(t), \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

$$u_x(1, t) = \psi_1(t), \quad t \in (0, T) \quad (5)$$

и условия переопределения

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad t \in (0, T).$$

Обратная задача II: найти функции $u(x, t)$, $q(t)$, связанные в Q уравнением (1) при выполнении для функции $u(x, t)$ начальных условий (2), (3), граничных условий (4), (5), а также некоторого условия переопределения

$$u(1, t) = \psi_0(t), \quad t \in (0, T).$$

Задачами в близкой постановке занимались Валитов И.Р. [1], [2], Павлов С.С.[3], Сафиуллова Р.Р. [4].

В работе [3] рассматривались многомерные обратные задачи с неизвестным коэффициентом $q(t)$, однако задавалось интегральное условие переопределения

$$\int_{\Omega} K(x)u(x, t)dx = \mu(t).$$

В работах [1], [2] рассматривались близкие к рассматриваемой задачи, но с тождественно нулевыми функциями $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$.

В работе [4] для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + q(t)u_t = f(x, t)$$

рассматривалась близкая по постановке задача.

Для рассматриваемых обратных задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

При доказательстве используется техника, основанная на переходе от исходных обратных задач к некоторым вспомогательным задачам, доказательстве их разрешимости и далее построении с помощью решения вспомогательных задач решения исходных обратных задач.

При решении вспомогательных задач используются метод регуляризации, срезки и метод продолжения по параметру.

ЛИТЕРАТУРА

1. Валитов И. Р. Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, № 1. С. 3–18.
2. Валитов И. Р. О разрешимости двух обратных задач для гиперболических уравнений // Труды Стерлитамакского филиала Академии наук республики Башкортостан. Сер. Физико-математические и технические науки. 2006. Т. 1, № 3. С. 64–73.
3. Павлов С. С. Нелинейные обратные задачи для многомерных гиперболических уравнений с интегральным переопределением // Математические заметки ЯГУ. 2011. Т. 19, № 2. С. 128–154.
4. Сафиуллова Р. Р. Обратная задача для гиперболического уравнения второго порядка с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени // Вестник Южно-Уральского государственного университета. 2013. Т. 6, № 4. С. 73–86.

**ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С
НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ САМАРСКОГО
ON A THIRD-ORDER EQUATION WITH NONLOCAL
CONDITIONS SAMARSKY**

Семенова Е. А.

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
dunuya-s@mail.ru*

В настоящей работе изучается разрешимость нелокальных краевых задач для уравнения третьего порядка с граничными условиями А. А. Самарского, а также с интегральными условиями.

Пусть Ω есть интервал $(-1; 1)$ оси $0x$, Q есть прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $T < +\infty$. В области Q рассматривается уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial t}(u_{tt} - h(x)u_{xx}) + cu = f. \quad (1)$$

Одним из источников задач с нелокальными интегральными условиями для гиперболических уравнений явились работы А. В. Лыкова, посвященные моделированию некоторых процессов тепло- и массообмена. В работах А. М. Нахушева выявлена тесная связь нелокальных задач для гиперболических уравнений с нагруженными уравнениями. Нелокальные задачи с интегральными граничными условиями для гиперболических уравнений весьма активно изучались в работах А. Bouziani, S. Mesloub, Д. Г. Гордезиани, Г. А. Авадишвили, С. А. Бейлина, Л. С. Пулькиной, А. И. Кожанова, В. Б. Дмитриевой. Для неклассических уравнений третьего порядка отметим работы Г. А. Лукиной [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукина Г. А. О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для уравнения третьего порядка // Математические заметки ЯГУ. 2010. Т.17, вып.№1. С. 35–46

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ
УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕИЗВЕСТНЫМИ
ПРАВЫМИ ЧАСТЬЯМИ**

**BOUNDARY PROBLEM FOR A DEGENERATE EQUATION OF
MIXED TYPE WITH UNKNOWN RIGHT-HAND SIDES**

Сидоров С. Н.

*Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
Стерлитамак, Россия;
stsid@mail.ru*

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = f_1(x), & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2 (-t)^m u = f_2(x), & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, t) | 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, где $m > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа.

Задача. Найти в области D функцию $u(x, t)$ и $f_i(x)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$u(x, t) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+), \quad (2)$$

$$f_i(x) \in C(0, 1) \cap L_2[0, 1], \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

$$Lu(x, t) \equiv f_i(x), \quad (x, t) \in D_- \cup D_+, \quad (4)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (5)$$

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6)$$

$$u(x, \beta) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

$$u_t(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (8)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = g(0) = g(1) = 0$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

Отметим, что прямая начально-граничные задача (2), (4)–(6) для уравнения (1) при $f_1(x) = f_2(x) \equiv 0$ в прямоугольной области D изучена в работах [1, 2] при всех $m \geq 0$. В работе [3] рассмотрена задача (2)–(7) для уравнения (1) при $m = b = 0$ с одинаковыми неизвестными правыми частями, т.е. при $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$. В статьях [4, 5] методом спектрального анализа решены обратные задачи для уравнения (1) при $m = 0$ с условиями переопределения (7) и (8).

В отличие от этих исследований в данной работе рассматривается обратная задача для вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. Найдены необходимые и достаточные условия единственности решения. Решение задачи строится в виде суммы рядов по собственным

функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. При доказательстве сходимости рядов доказывается отделенность от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой. Доказана устойчивость решения по граничным функциям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сабитов К. Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 9. С. 273–279.
2. Сабитов К. Б., Рахманова Л. Х. Начально-гранична задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 9. С. 1175–1181.
3. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. 2010. Т. 546, № 4. С. 55–62.
4. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // ДАН. 2009. Т. 429, № 4. С. 451–454.
5. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 6. С. 907–918.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЛАДКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ 2N-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ С ПОЛНОЙ МАТРИЦЕЙ УСЛОВИЙ СКЛЕИВАНИЯ¹

RESEARCH OF SMOOTH SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR 2N-PARABOLIC EQUATIONS WITH CHANGING TIME DIRECTION WITH FULL MATRIX OF GLUING CONDITIONS

Синявский А. Г.¹, Попов С. В.²

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.
Аммосова", Якутск, Россия;

¹ sinyavsk_88@mail.ru, ² guspopov@mail.ru

В области $Q^+ = (0, +\infty) \times (0, T)$ рассматривается система уравнений

$$u_t^1 = Lu^1, \quad -u_t^2 = Lu^2 \quad \left(L \equiv (-1)^{n+1} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \right). \quad (1)$$

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014–2016 гг. (Проект №3047).

В настоящей работе изучаются краевые задачи для $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением времени (1) в пространствах Гёльдера при $n \geq 4$, устанавливаются разрешимости краевых задач в случае полных матриц условий склеивания, а также зависимости показателей гельдеровских пространств от весовых функций склеивания.

Отметим, что С.А. Терсенов изучал уравнения вида (1) при $n = 1$ в гельдеровских классах функций, разрешимость сводил к разрешимости сингулярного интегрального уравнения и условия разрешимости выписывал в явном виде [1]. При этом предполагалось, что условия склеивания на линии раздела должны быть непрерывными, включая соответствующие производные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tersenov S. A. On a method of solving initial boundary value problems for higher order equations // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т.17, № 1. С. 138–145.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM IN INFINITE CYLINDER FOR NONCLASSICAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Спиридонова Н. Р.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
nariya@yandex.ru

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства \mathbb{R}^n с гладкой границей Γ , Q_∞ есть цилиндр $\Omega \times (0; \infty)$.

Рассматривается неклассическое дифференциальное уравнение высокого порядка

$$Lu = (-1)^{p+1} D_t^{2p} u - Au = f(x, t), \quad (1)$$

где A – эллиптический оператор

$$Au = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij}(x) u_{x_j} \right) + a_0(x) u,$$

$f(x, t)$, $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $a_0(x)$ – заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$ и $p > 1$ – целое число.

Краевая задача. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q_∞ решением уравнения (1) удовлетворяющую следующим условиям

$$D_t^k u \Big|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p,$$

$$u(x, t)|_S = 0.$$

Для уравнений (1) в работе [1] была предложена постановка краевых задач, доказаны теоремы существования и единственности обобщенных и регулярных решений в конечной области. В настоящей работе рассмотрена краевая задача в бесконечном цилиндре, которую с помощью замены переменной приводят к задаче в цилиндре конечной высоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: изд-во ВЦ СО РАН, 1995.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

THE SOLVABILITY OF LINEAR INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION OF HIGH ORDER WITH TWO UNKNOWN COEFFICIENTS

Телешева Л. А.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия;
love_20_09@mail.ru

Обратные задачи для параболических уравнений высокого порядка изучены сравнительно мало. В работах [1, 2] неизвестный параметр зависит от пространственной переменной x . Обратные задачи для параболического уравнения с параметром, зависящим от временной переменной t , ранее рассматривались в случае интегрального переопределения [3, 4] и изучались методами отличными от методов применяемых в данной работе.

В докладе рассматривается вопрос о разрешимости обратной задачи определения правой части для параболического уравнения четвертого порядка, с граничным условием переопределения.

Пусть Q есть прямоугольник $\{(x, t) : x \in (0, 1), t \in (0, T), T < \infty\}$. Далее, пусть $f(x, t), c(x, t), h_1(x, t), h_2(x, t)$ быть функции определенные в \bar{Q} , $u_0(x)$ есть известная функция, определенная при $x \in [0, 1]$. Требуется найти функции $u(x, t), q_1(t), q_2(t)$ связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t + u_{xxxx} + c(x, t)u = f(x, t) + q_1(t)h_1(x, t) + q_2(t)h_2(x, t),$$

причем функция $u(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx}(0, t) = 0, \\ u_{xx}(1, t) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xxx}(0, t) = 0, \\ u_{xxx}(1, t) = 0, \end{cases}$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in [0, 1].$$

Получены условия существования и единственности регулярных решений поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллова Г.А. Обратная задача для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при решении в случае интегрального переопределения // Матем.заметки ЯГУ.2003.т.10.№1.с.34-35.
2. Кожанов А.И., Кириллова Г.А. О некоторых обратных задачах для параболического уравнения четвертого порядка // Матем.заметки ЯГУ.2000,с.35-48.
3. Телешева Л.А. Обратная задача для параболических уравнений высокого порядка: случай неизвестного коэффициента, зависящего от времени // Вестник БГУ. Математика и информатика. 2010/9, с.175-182
4. Телешева Л.А. О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при производной по времени // Матем.заметки ЯГУ.2011.т.18.вып.2,с.180-201.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА К УРАВНЕНИЮ СМЕШАННОГО ТИПА¹

APPLICATION OF THE MODIFIED GALERKIN METHOD TO THE EQUATION OF MIXED TYPE.

Тихонова И. М.

Научно-исследовательский институт математики СВФУ, Якутск,
Россия;
Irinamikh3007@mail.ru

Пусть $\Omega \subset R^n$ ограниченная область с гладкой границей S , $Q = \Omega \times (0, T)$, $S_T = S \times (0, T)$. Рассмотрим уравнение смешанного типа

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014-2016 гг. (№ 3047).

$$Lu \equiv k(x, t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

где коэффициенты уравнения (1) являются достаточно гладкими функциями.

Изучается следующая краевая задача: найти решение уравнения (1), удовлетворяющий условиям

$$u|_{S_T} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{\bar{P}_0^+} = 0, \quad u_t|_{\bar{P}_T^-} = 0, \quad (3)$$

где

$$P_0^\pm = \{(x, 0) : k(x, 0) \gtrless 0, x \in \Omega\}, \quad P_T^\pm = \{(x, T) : k(x, T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

В данной работе рассматривается частный случай краевой задачи В.Н. Врагова[1], когда уравнение смешанного типа принадлежит гиперболическому типу вблизи нижнего основания и гиперболо-параболическому типу на верхнем основании цилиндрической области[2]. При этом получена оценка скорости сходимости модифицированного метода Галеркина. Оценка выражается через параметр регуляризации и собственные числа оператора Лапласа по пространственным переменным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
2. Егоров И. Е., Тихонова И. М. Применение стационарного метода Галеркина к уравнению смешанного типа. // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Н Т. 19, № 2. С. 20–28.

ОДИН КЛАСС ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

A CLASS OF FRACTIONAL ORDER DEGENERATE EVOLUTION EQUATIONS

Федоров В. Е.¹, Гордиевских Д. М.²

¹Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;

¹kar@csu.ru, ²dmitriy_g90@mail.ru

Пусть \mathfrak{U} и \mathfrak{V} — банаховы пространства, оператор $L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$ линеен и непрерывен, $\ker L \neq \{0\}$, оператор M линеен, замкнут и плотно в \mathfrak{U} определен на D_M , действует в пространство \mathfrak{V} . Пусть при всяком $\mu \in \mathbb{C}$ таком, что $|\mu| > a$, существует непрерывный обратный оператор $(\mu L - M)^{-1} : \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{U}$, в этом случае оператор M называется (L, σ) -ограниченным. Тогда имеют

место представления пространств $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$, которым соответствуют проекторы P и Q такие, что $\ker P = \mathfrak{U}^0$, $\text{im } P = \mathfrak{U}^1$, $\ker Q = \mathfrak{V}^0$, $\text{im } Q = \mathfrak{V}^1$. При этом $M : D_M \cap \mathfrak{U}^k \rightarrow \mathfrak{V}^k$, $L : \mathfrak{U}^k \rightarrow \mathfrak{V}^k$ для $k = 0, 1$ [1]. Через M_k (L_k) обозначим сужение оператора M (L) на $D_{M_k} = \mathfrak{U}^k \cap D_M$ (\mathfrak{U}^k), $k = 0, 1$, через H — оператор $M_0^{-1}L_0$. (L, σ) -ограниченный оператор M называется (L, p) -ограниченным, если соответствующий оператор H нильпотентен степени $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть $E_{\alpha, \beta}$ — функция Миттаг-Лёфлера, $U_{\alpha, \beta}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=a+1} (\mu L - M)^{-1} L E_{\alpha, \beta}(\mu t^\alpha) d\mu$, $\alpha, \beta > 0$. При $\alpha > 0$ D_t^α есть

дробная производная Капуто, m — наименьшее натуральное число, не меньшее, чем α . Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha Lu(t) &= Mu(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \\ u^{(k)}(0) &= u_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \tag{1}$$

Решением задачи (1) будем называть функцию $u \in C([0, T]; D_M)$ такую, что $Lu \in C^{m-1}([0, T]; \mathfrak{V})$, $\frac{t^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} * \left(Lu(t) - \sum_{k=0}^{m-1} (Lu)^{(k)}(0) \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} \right) \in C^m([0, T]; \mathfrak{V})$, и справедливы равенства (1). Здесь знаком * обозначена свертка функций.

Теорема 1. Пусть оператор M (L, p) -ограничен, $Qf \in C^m([0, T]; \mathfrak{V})$, $(D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}(I - Q)f \in C([0, T]; \mathfrak{U})$ при $k = 0, 1, \dots, p$,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{d^k}{dt^k} \sum_{n=0}^p (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1}(I - Q)f(t) = -(I - P)u_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1), причем оно имеет вид

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} U_{\alpha, k+1}(t)u_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} U_{\alpha, \alpha}(t-s) L_1^{-1} Qf(s) ds - \\ &\quad - \sum_{k=0}^p (D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}(I - Q)f(t). \end{aligned}$$

Пусть $P_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$, $Q_{n_1}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n_1} d_j \lambda^j$, $c_i, d_j \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, n_1$, $c_n, d_{n_1} \neq 0$, $n \geq n_1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $A_1 : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ имеет область определения $D_{A_1} = \{u \in H^2(\Omega) : (1 - \theta + \theta \frac{\partial}{\partial\nu}) u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$ и действует по правилу $A_1 u = \Delta u$. Через $\{\varphi_k\}$ обозначим ортонормированную систему собственных функций оператора A_1 , соответствующих его собственным значениям $\{\lambda_k\}$, занумерованным по невозрастанию с учетом кратности. С помощью теоремы 1 нетрудно установить условия разрешимости задачи

$$P_n(\Delta) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = Q_{n_1}(\Delta)u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \tag{2}$$

$$\left(1 - \theta + \theta \frac{\partial}{\partial\nu} \right) \Delta^k u(x, t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \tag{3}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}(x, 0) = u_{m-1}(x), x \in \Omega. \quad (4)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — обозначение для производной по нормали.

Теорема 2. Пусть $f \in C^m([0, T]; L_2(\Omega))$,

$$\langle Q_{n_1}(\Delta)u_k + f^{(k)}(\cdot, 0), \varphi_k \rangle = 0 \text{ при } P_n(\lambda_k) = 0, k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Тогда существует единственное решение задачи (2)–(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston: VSP, 2003.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

ON SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NON-STATIONARY COMPOSITE TYPE THIRD ORDER EQUATION

Хашимов А. Р.¹, Ахмедов М. И.²

Ташкентский финансовый институт, Ташкент, Узбекистан;
¹abdukomil@yandex.ru, ²maqsad.ahmedov@mail.ru

В последнее время одним из актуальных направлений математики является построение решения краевых задач для уравнений с частными производными в метрических графах. До сих пор в метрических графах рассматривались уравнения четного порядка, например, уравнения Шредингера. В этом направление исследование уравнения нечетного порядка почти не было проведено.

В данной работе рассматривается нестационарного уравнения третьего порядка составного типа

$$Lu \equiv u_{xxx} + u_{yyy} - u_t = 0, \quad (1)$$

В области $\Omega^- = \{(x, y, z) : 0 < x < 1, y < 0, 0 < t \leq T\}$

$$u(x, y, 0) = 0 \quad (2)$$

и с краевыми условиями

$$u(x, y, 0) = 0, (x, y) \in \overline{\Omega_0},$$

$$u(0, y, t) = \varphi_1(y, t), u_x(0, y, t) = \varphi_2(y, t), (y, t) \in \Omega_2$$

$$u(1, y, t) = \varphi_3(y, t), (y, t) \in \Omega_4$$

$$u(x, 0, t) = \psi_1(x, t), u_y(x, 0, t) = \psi_2(x, t), (x, t) \in \Omega_1$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} u(x, y, t) \rightarrow 0$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \{(x, y, t) : 0 < x < 1, y < 0, t = 0\}, \\ \Omega_1 &= \{(x, y, t) : 0 < x < 1, y = 0, 0 < t \leq T\}, \\ \Omega_2 &= \{(x, y, t) : x = 0, y < 0, 0 < t \leq T\}, \\ \Omega_3 &= \{(x, y, t) : 0 < x < 1, y < 0, t = T\}, \\ \Omega_4 &= \{(x, y, t) : x = 1, y < 0, 0 < t \leq T\}.\end{aligned}$$

Методом интегралов энергии доказывается единственность решений задачи. Методом потенциалов построено решения задачи.

Аналогичное исследование проведено в области $\Omega^+ = \{(x, y, z) : 0 < x < 1, y > 0, 0 < t \leq T\}$. Далее, с помощью этих задач можно исследовать уравнения (1) в метрических графах.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА

ON THE NONLOCAL PROBLEM FOR THE LOADED ALLER EQUATION

Холиков Д. К.

*Ташкентский архитектурно-строительный институт, Ташкент,
Узбекистан;
xolikov23@mail.ru*

Рассмотрим в области $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ нагруженное уравнение Аллера

$$u_{xxt} + au_{xx} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, t) dx, \quad (1)$$

здесь a, α, β – заданные постоянные, причем $0 \leq \alpha < \beta \leq l$.

Задача. Найти в области D решение уравнения (1) удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = \alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u(l, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u_x(l, t) = \beta_1 u(0, t) + \beta_2 u(l, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция, α_i, β_i , ($i = 1, 2$) – заданные постоянные, причем $\beta_i \neq 0$.

Отметим, что нелокальные задачи для уравнений теплопроводности с переменными коэффициентами и уравнение Аллера исследованы в работах [1, 2].

Теорема. Если $\varphi(x) \in C^2(0, l) \cap C^1[0, l]$ и $a \neq 0$, $b(\beta^3 + \alpha^3) = 6$ или $b(\beta^3 + \alpha^3) \neq 6$, тогда задача (1)–(4) имеет единственное решение.

Решение задачи (1)–(4) найдено в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М: Высшая школа, 1995. – 301 с.
2. Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера. //Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. – С. 763–774.

ИЕРАРХИЯ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В УПРУГИХ ТЕЛАХ¹

HIERARCHY OF THIN INCLUSIONS IN ELASTIC BODIES

Хлуднев А. М.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск,
Россия;
khlud@hydro.nsc.ru

Рассматриваются задачи равновесия упругих тел, содержащих тонкие включения с возможным отслоением. Наличие отслоения означает, что имеется трещина между тонким включением и упругим телом. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия вида неравенств, которые исключают взаимное проникание берегов. Установлена разрешимость краевых задач и исследован предельный переход по параметрам жесткости тонкого включения. В частности, в пределе получены задачи о равновесии упругого тела с жестким и полужестким включением, а также с включением нулевой жесткости. Указанные предельные переходы позволяют построить иерархию тонких включений в упругих телах.

ЛИТЕРАТУРА

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (13-01-00017).

1. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М: Физматлит, 2010.
2. Khludnev A. M., Negri M. Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body// ZAMM. 2012. V. 92. N 5, P. 341–354.
3. Khludnev A. M., Leugering G. On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies// Mathematics and Mechanics of Solids, doi:10.1177/1081286513505106.
4. Khludnev A. M., Leugering G. Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies// Mathematics and mechanics of complex systems. 2014. V. 2, N 1. P. 1–21.

ДВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

THE TWO DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SIXTH ORDER

Чуешева Н. А.

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
chuesheva@ngs.ru

Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В работе [1] исследуются краевые задачи для уравнения $Au - Bu + Su = f(t, x)$, $t \in (0, 1)$, $x \in \Omega$, где $A = A(t, D_t)$ – обыкновенный дифференциальный оператор порядка $l \geq 2$, по переменной t ; оператор $B = B(x, D_x)$, порядка 2ν по переменным $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, является равномерно эллиптическим в $\bar{\Omega}$; $S = S(t, x, D_t, D_x)$ – дифференциальный оператор меньшего порядка, чем порядки A и B .

В работе [2] $A = A(t, D_t)$ – вырождающийся дифференциальный оператор второго порядка; оператор $B = B(x, D_x)$ порядка $2m$ по переменной x ; S является равномерно эллиптическим оператором второго порядка по переменным $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Задача. В области $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2, x \in (0, x_0), t \in (0, t_0)\}$, $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$, рассмотрим уравнение

$$u_{ttt} + a_1 u_{tt} + a_2 u_t + u_{xxxxxx} + a_3 u_{xxxxx} + a_4 u_{xxxx} + \\ + a_5 u_{xxx} + a_6 u_{xx} + a_7 u_x + a_8 u = f(x, t), \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0, t=t_0} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{x=0, x=x_0} = u_{xx}|_{x=0, x=x_0} = u_{xxxx}|_{x=0, x=x_0} = 0. \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x, t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия 1) $a_3 = a_5 = a_7 = 0$; 2) $a_1 < 0$, $a_4 < 0$, $a_6 > 0$; 3) $3+2a_1 \cdot (t_0-t) \geq \delta_1 > 0$; 4) $-2a_8 \cdot (t_0-t) - a_2 \geq \delta_2 > 0$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2), (3) из пространства $H^{3,2}(D)$.

Здесь пространство $H^{3,2}(D)$ – является замыканием пространства бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3), по норме

$$\|u\|_{H^{3,2}(D)}^2 = \left\| u \sqrt{a(t)} \right\|_0^2 + \|u_t\|_0^2 + \|u_{tt}\|_0^2 + \left\| u_{xxx} \sqrt{a(t)} \right\|_0^2 + \left\| u_{xx} \sqrt{a(t)} \right\|_0^2.$$

Пример 1. Если не выполнены условия теоремы на коэффициенты этого уравнения, то решение этой задачи будет неединственно. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполняются условия: 1) $a_3 - a_5 + a_7 = 0$; 2) $a_1 = -1$, 3) $a_2 = 1$; 4) $-1 + a_4 - a_6 + a_8 = 0$.

Ненулевым решением поставленной краевой задачи (2), (3) при $x_0 = \pi$, $t_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ будет функция

$$u(x, t) = \sin x \cdot \left(\sqrt{3} + e^{\frac{t}{2}} \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right).$$

Пример 2. В области $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2, x \in (0, \pi), t \in (0, \infty)\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{ttt} - u_{tt} - u_t + u_{xxxxx} + u_{xxxx} - u_{xx} = 0$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \frac{\sin nx}{n^5}, \quad u_t|_{t=0} = \frac{\sin nx}{n^3}, \quad u_{tt}|_{t=0} = \frac{\sin nx}{n}$$

и с краевыми условиями (3). Не устойчивым решением этой задачи будет функция

$$u(x, t) = \frac{e^{n^2 t} \sin nx}{n^5}.$$

Пример 3. В работе [3] рассматривается нелинейное уравнение следующего вида

$$u_{xxxxxx}(x, t) + 15u_x(x, t) \cdot u_{xxxx}(x, t) + 15u_{xx}(x, t) \cdot u_{xxx}(x, t) + 45(u_x(x, t))^2 \cdot u_{xx}(x, t) - 5u_{xxxx} - 15u_x(x, t) \cdot u_{xt}(x, t) - 15u_t(x, t) \cdot u_{xx}(x, t) - 5u_{tt}(x, t) = 0.$$

Можно показать, что решением этого уравнения будет функция

$$u(x, t) = c_3 - 2c_2 \tanh \left(-c_1 - c_2 x - 4 \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{10} \sqrt{5} \right) c_2^3 t \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чуешев А. В. Об одном нелинейном уравнении смешанного типа нечетного порядка // Вестник Новосиб. ун-та, серия "математика, механика, информатика". Новосибирск. 2001. Т. 1, Вып. 1. С. 107–123.
2. Чуешева Н. А. Об одной краевой задаче для уравнения порядка $2m$ // Вестник Красноярского госуниверситета. Физико-математические науки. Красноярск. 2006. № 4. С. 157–162.
3. Inan I. E. (G'/G) -Expansion Method for Traveling Wave Solutions of the Sixth-Order Ramani Equation // Cankaya University Journal of Science and Engineering. 2010. 7, № 1. С. 51–57.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ON THE SOLVABILITY OF SOME CONJUGATION PROBLEMS FOR ELLIPTIC EQUATIONS.

Шадрина Н. Н.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия;
ShadrinaNN8@yandex.ru

Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^n некоторую ограниченную область Ω с гладкой (для простоты - бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q есть цилиндр $\Omega \times (-1, 1)$, Q^- и Q^+ - цилиндры $Q^- = \Omega \times (-1, 0)$, $Q^+ = \Omega \times (0, 1)$. Далее, пусть $p(x, y), c(x, y), f(x, y), \alpha_i(x), \beta_i(x) (i = \overline{1, 4})$ - заданные в пространстве $V = \{v(x, y) : v(x, y) \in W_2^2(Q^-) \cup W_2^2(Q^+)\}$ функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $y \in [-1, 1]$, причем функция $p(x, y)$ строго положительна при $(x, y) \in \bar{Q}$ и может иметь разрыв первого рода при переходе через плоскость $y = 0$, $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \alpha_4(x))$, $(\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x), \beta_4(x))$ - некоторые линейно-независимые при каждом фиксированном $x \in \bar{\Omega}$ вектор-функции, B_1 и B_2 есть линейные операторы, ставящие в соответствие функции $u(x, y)$ функцию $(B_i u)(x)$. L - дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, y)$ определяется равенством

$$Lv \equiv \Delta_x v + \frac{\partial}{\partial y}(p(x, y)v_y) + c(x, y)v,$$

где $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Задача сопряжения: найти функцию $u(x, y)$, являющуюся в цилиндрах Q^- и Q^+ решением уравнения

$$Lu = f(x, y) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются граничные условия на боковой поверхности $S (S = \Gamma \times (-1, 1))$

$$u(x, y)|_S = 0, \quad (2)$$

на основаниях

$$u(x, -1) = 0, u(x, 1) = 0, x \in \Omega; \quad (3)$$

а также условия сопряжения на границе раздела областей Q^- и Q^+ :

$$\alpha_1(x)u(x, -0) + \alpha_2(x)u(x, +0) + \alpha_3(x)u_y(x, -0) + \alpha_4(x)u_y(x, +0) + B_1u = 0, \quad (4)$$

$$\beta_1(x)u(x, -0) + \beta_2(x)u(x, +0) + \beta_3(x)u_y(x, -0) + \beta_4(x)u_y(x, +0) + B_2u = 0, \quad (5)$$

где $x \in \Omega$.

Задачи сопряжения (дифракции) возникают при математическом моделировании многих процессов механики, физики, биологии и т.д. на границе раздела двух сред с различными физическими характеристиками. Задача (1) – (5) в частном случае совпадает с хорошо изученной классической задачей дифракции [1], [2]. В настоящей работе задача сопряжения рассматривается в общем виде, ранее такие задачи не изучались.

В ходе решения, с учетом линейной независимости векторов $(\alpha_i(x), (\beta_i(x))(i = \overline{1, 4}))$, задача сопряжения (1)-(5) переопределяется как одна из трех задач сопряжения с соответствующими краевыми условиями. Применяя метод продолжения по параметру [3], а также теоремы вложения [4], для указанных задач получены априорные оценки и доказаны соответствующие теоремы существования и единственности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник О. А. Об одном методе решения общей задачи дифракции. // ДАН СССР. 1960. С. 1054-1057.
2. Ильин В. А. О разрешимости задачи Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами. // ДАН СССР. 1961. Т.137. № 1. С. 28-30.
3. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
4. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ ON SOLVABILITY OF ONE NOT WELL POSED PROBLEM

Юлдашева А.В.

Национальный университет Узбекистана имени М. Уаугбека, Ташкент,
Узбекистан;
yuasv86@mail.ru

В работе рассматривается вопрос о существовании L_2 -решения краевой задачи для уравнения колебания балки в прямоугольнике. При этом используются определения введенные в работе [1].

В области $Q = \{(x, t) : 0 < x < a, 0 < t < T\}$ рассмотрим следующую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(a, t) = u''(0, t) = u''(a, t) = 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0 \quad (3)$$

Определение. Назовем L_p -решением краевой задачи (1)-(3) функцию $u \in L_p^0(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1) в смысле теории распределения.

Теорема. Пусть $\theta = \frac{\pi T}{a^2}$ – алгебраическое число степени 2 и пусть

$$0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad 2\alpha + \beta \geq 1/2.$$

Тогда для любой функции $f \in H_p^{0,\alpha,\beta}(Q)$ задача (1)-(3) имеет и при том единственное L_2 -решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. Москва: Наука, 1987.
2. Алимов Ш. А. Об L_p -решениях одной краевой задачи // Узбекский математический журнал. 1999. № 1. С. 3–9.

Подсекция I.I Оптимальное управление и конфликтно управляемые процессы

ONLINE MATCHING IN GAME THEORY

Akimov F. R.

North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia;
fat_32_2001@mail.ru

It is well known that Internet companies, such as Amazon and eBay, are able to open up new markets by tapping into the fat tails of distributions. This holds for search engine companies as well: The advertising budgets of companies and organizations follows a power law distribution, and unlike conventional advertising, search engine companies are able to cater to low budget advertisers on the fat tail of this distribution. This is partially responsible for their dramatic success.

The following computational problem, which we call the Adwords problem: assign user queries to advertisers to maximize the total revenue. Observe that the task is necessarily online - when returning results of a specific query, the search engine company needs to immediately determine what ads to display on the side. The computational problem is specified as follows: each advertiser places bids on a number of keywords and specifies a maximum daily budget. As queries arrive during the day, they must be assigned to advertisers. The objective is to maximize the total revenue while respecting the daily budgets.

In this paper, we present a deterministic algorithm achieving a competitive ratio of $1 - \frac{1}{e}$ for this problem, under the assumption that bids are small compared to budgets. The algorithm is simple and time efficient. No randomized algorithm can achieve a better competitive ratio, even under this assumption of small bids.

The adwords problem is clearly a generalization of the online bipartite matching problem: the special case where each advertiser makes unit bids and has a unit daily budget is precisely the online matching problem. Even in this special case, the greedy algorithm achieves a competitive ratio of $1/2$. The algorithm that allocates each query to a random interested advertiser does not do much better - it achieves a competitive ratio of $\frac{1}{2} + O(\frac{\log n}{n})$.

The randomized algorithm for the online matching problem achieving a competitive ratio of $1 - 1/e$ fixes a random permutation of the bidders in advance and breaks ties according to their ranking in this permutation.

The natural algorithm to try assigns each query to a highest bidder, using the previous heuristic to break ties (largest remaining budget). We provide an example in the appendix to show that such an algorithm achieves a competitive ratios strictly smaller and bounded away from $1 - \frac{1}{e}$.

This indicates the need to consider a much more delicate tradeoff between the bid versus unspent budget. The correct tradeoff function is derived by a novel LP-based approach, which we outline below. The resulting algorithm is very simple, and is based on the following tradeoff function:

$$\psi(x) = 1 - e^{-(1-x)}$$

Algorithm: Allocate the next query to the bidder i maximizing the product of his bid and $\psi(T(i))$, where $T(i)$ is the fraction of the bidder's budget which has been spent so far, i.e., $T(i) = \frac{m_i}{b_i}$ where b_i is the total budget of bidder i , m_j is the amount of money spent by bidder i when the query arrives.

There are N bidders, each with a specified daily budget b_i . Q is a set of query words. Each bidder i specifies a bid c_{iq} for query word $q \in Q$. A sequence $q_1 q_2 \dots q_M$ of query words $q_j \in Q$ arrive online during the day, and each query q_j must be assigned to some bidder i (for a revenue of c_{iq}). The objective is to maximize the total revenue at the end of the day while respecting the daily budgets of the bidders.

The bids are small compared to the budgets, i.e., $\max_{ij} c_{ij}$ is small compared to $\min_i b_i$. The guarantees of our algorithm are provided for the case when $\frac{\max_{i,j} c_{ij}}{\min_i b_i} \rightarrow 0$. For the applications of this problem mentioned in the Introduction, this is a reasonable assumption. In fact, it suffices to make the weaker assumption that $\max_j c_{ij}$ is small compared to b_j , for all i .

An online algorithm is said to be a-competitive if for every instance, the ratio of the revenue of the online algorithm to the revenue of the best off-line algorithm is at least a.

While presenting the algorithm and the proofs, we will make the simplifying assumptions that the budgets of all bidders are equal (assumed unit) and that the best offline algorithm exhausts the budget of each bidder.

REFERENCES

1. Henzinger M. Private communication. 2004.
2. Jain K., Mahdian M., Markakis E., Saberi A., Vazirani V. Greedy facility location algorithms analyzed using dual fitting with factor-revealing lp. J. ACM, 2003.
3. Kalyanasundaram B., Pruhs K. An optimal deterministic algorithm for online b-matching. Theoretical Computer Science, 233(1-2):319–325, 2000.
4. Karp R.M., Vazirani U.V., Vazirani V.V. An optimal algorithm for online bipartite matching. In Proceedings of the 22nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1990.

AUTOREGULATION OF CEREBRAL BLOOD FLOW: TOWARDS PREVENTING INTRACRANIAL HEMORRHAGES IN PREMATURE NEWBORNS

Turova V. L.^{1*}, Lampe R.^{1*}, Botkin N. D.^{2*}, Blumenstein T.¹,
Alves-Pinto A.¹

* equal contribution

¹ Clinic ‘rechts der Isar’, Technical University of Munich, Munich, Germany;
turova@mytum.de

² Center for Mathematics, Technical University of Munich, Garching, Germany;
botkin@ma.tum.de

Premature birth (before 37 weeks of pregnancy) increases the risk of intracranial hemorrhage [1] that can lead to cerebral palsy - a multiple disability which requires lifelong medical attention. Long-standing experience in the investigation and treatment of diverse manifestations of cerebral palsy (see e.g. [2]) motivates research towards preventing cerebral hemorrhages. The cause of such cerebral injuries is the so-called germinal matrix being an accumulation of immature blood vessels in the premature infant brain. The most important factor contributing to vulnerability of the germinal matrix to hemorrhage is impaired cerebral autoregulation that leads to dangerous fluctuations in cerebral blood flow. A better understanding of such processes requires mathematical modeling based both on physical and biological principles.

Two mathematical models of cerebral autoregulation are discussed in this paper. The first one is an enhancement of a vascular model proposed by Piechnik et al in [3]. We extend this model by adding a polynomial dependence of the vascular radiiuses on the arterial blood pressure and adjusting the polynomial coefficients to experimental data to gain the autoregulation behavior. Moreover, the inclusion of a Preisach hysteresis operator simulating a hysteretic dependence of the cerebral blood flow on the arterial pressure is tested. The second model couples the blood vessel system model by Piechnik et al. with an ordinary differential equation model of cerebral autoregulation by Ursino and Lodi [4]. An optimal control setting is proposed for a simplified variant of this coupled model. The objective of the control is the maintenance of the autoregulatory function for a wider range of the arterial pressure. The control is interpreted as intake of a drug changing the cerebral blood flow by, e.g., dilation of blood vessels, whereas unpredictable variations in arterial pressure are considered as disturbance. Advanced numerical methods [5] are applied for the numerical treatment of the control problem.

REFERENCES

1. Bada H. S., Korones S. B., Anderson G. D., Magill H. L., Wong S. P. Obstetric factors and relative risk of neonatal layer/intraventricular hemorrhage // American Journal of Obstetrics and Gynecology. 1984. Vol. 148, No. 6. pp. 798–804.
2. Lampe R., Mitternacht J. Non-invasive diagnostic methods of perceptual and motoric disabilities of children with cerebral palsy // Orthopedic Reviews. 2009. Vol. 1, e20.
3. Piechnik S. K., Chiarelli P. A., Jezzard, P. Modelling vascular reactivity to investigate the basis of the relationship between cerebral blood volume and flow under CO₂ manipulation // NeuroImage. 2008. Vol. 39. pp. 107–118.
4. Ursino M., Lodi C. A. A simple mathematical model of the interaction between intracranial pressure and cerebral hemodynamics // Journal of Applied Physiology. 1997. Vol. 85, No. 4. pp. 1256–1269.
5. Botkin N. D., Hoffmann K.-H., Turova V. L. Stable numerical schemes for solving Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equations // SIAM Journal on Scientific Computing. 2011. Vol. 33, No. 2. pp. 992–1007.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОВОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ ДЛЯ СППР¹

METHOD FOR SOLVING OF GENERALIZED SCHEDULING PROBLEM FOR DSS

Беркетов Г. А.¹, Романова Е. В.²

Московский государственный университет экономики, статистики и
информатики, Москва, Россия;
¹gberketov@mesi.ru, ²eromanova@mesi.ru

Рассматривается замкнутая система обслуживания с фиксированным числом работ. Задано пронумерованное множество работ, подлежащих выполнению в системе, $R = \{R_1, \dots, R_n\}$. Для каждой работы R_i задана последовательность составляющих ее операций $\tilde{R}_i = \{r_{i1}, \dots, r_{im}\}$. Длительность всех операций полагается постоянной, равной τ . Таким образом, в рассматриваемой модели работа интерпретируется как множество последовательных операций одной и той же длительности. Пусть также заданы пронумерованные конечные множества $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ и $P = \{p_1, \dots, p_l\}$. Элементы множества G будем называть “исполнителями”, а элементы множества P –

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 14-07-00880).

“машинами”, которые моделируют ресурсы системы. Составление расписания означает, что для каждой операции $r_{ij} \in \tilde{R}$ на временной оси задается интервал $h_{ij} \in S$, когда эта операция должна выполняться. Расписание $H = \{h_{ij}\}$ называется допустимым, если выполняются следующие условия:

- 1) выполнение работы R_i начинается не ранее момента a_i , то есть $h_{i1} \geq a_i - 1$;
- 2) все операции выполняются без прерываний и нарушения технологической упорядоченности. Одновременно не может выполняться двух операций одной и той же работы $h_{il} < h_{ik}$, если $l < k \leq m_i$;
- 3) каждый исполнитель g и каждая машина p в заданный интервал времени S участвуют в выполнении только одной операции.

Опишем теперь критерий оценки расписания, принятый в рассматриваемой модели. Пусть $f_i(t)$ - число операций работы R_i , которые должны быть выполнены к моменту t .

Пусть, например, $|\tilde{R}_i| = m_i$ и d_i - плановый срок окончания работы. Тогда равномерному распределению работы R_i на интервале (a_i, d_i) соответствует функция $f_i(t) = \frac{m_i(t-a_i)}{d_i-a_i}$, $a_i < t < d_i$, $t \in T$.

Положим

$$F_i = \max |f_i(t) - y_i(t)|, \quad (1)$$

$$F(H) = \sum_{i=1}^n F_i(H).$$

Важно минимизировать запаздывание выполнения работ относительно плановых сроков их окончания, поэтому мы будем рассматривать только незадерживающие расписания. Расписание H^* будем называть оптимальным, если $F(H^*) = \min F(H)$ при $H \in D_H$, где D_H - множество допустимых незадерживающих расписаний.

Применим метод параметрической декомпозиции экстремальных задач, проведя следующую декомпозицию задачи построения оптимального расписания. Будем рассматривать расписание H как последовательность слоев $W(1)$, $W(2)$, т.е. для каждого стандартного интервала будем указывать те операции, которые на нем выполняются. Таким образом, построение расписания разбивается на ряд шагов. На каждом шаге S' решается задача оптимального выбора множества $W(S)$. При этом должны учитываться ограничения 1-3.

Пусть $Q(S)$ - множество ожидающих операций. В каждый момент времени множество ожидающих операций есть подмножество тех операций из \tilde{R} , для которых предшествующие уже включены в расписание. Каждая вершина из $Q(s)$ соединяется дугой со своим дублем из $Q'(s)$. Множество таких дуг обозначим через U_Q . Множество дуг из Q в P реализует отображение $\beta(r)$. Каждая вершина из P соединяется со стоком t_k . Будем рассматривать граф N как сеть с ограничениями на дугах. Функция $\gamma(u)$ определяет ограничения

$$\gamma(u) = 1 \text{ для всех } u \in U.$$

Определим на N функцию C , которая каждой дуге $u \in U$ ставит в соответствие стоимость потока по этой дуге. Тогда

$$C_s(u) = \begin{cases} Z_s(w), & \text{если } u = (w, w') \in U_Q, \\ 0, & \text{если } u \notin U_Q. \end{cases}$$

Вывод I. Максимальный поток максимальной стоимости по сети N дает решение задачи выбора на слое.

Доказательство основывается на рассмотрении структуры сети N . Полное расписание H строится в результате последовательного решения задач выбора.

Вывод 2. Расписание H является незадерживающим.

Рассмотренная модель применима для составления учебных расписаний. В этом случае G является множеством учебных групп, а блоки множества G учебными потоками. Множество отождествляется с множеством преподавателей. Работа - это учебная дисциплина, планируемая для групп некоторого потока. Ограничения 1-3 выражают требования к расписанию. Незадерживающим расписаниям соответствуют учебные расписания с минимальным числом "окон". Оптимизация расписания в соответствии с критерием (1) приводит к наиболее равномерному распределению понятий (операций) каждой дисциплины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беркетов Г. А., Лебедев С. А. Оценка достоверности результатов контроля учебной работы преподавателя // Сборник НПК Современные ИТ в управлении и образовании, часть 3, М., ФГУП НИИ Восход, 2014

О ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЗАДАЧИ ВЫБОРА БАНКОВСКИХ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

ON THE GAME-THEORETIC INTERPRETATION OF THE PROBLEM SELECTION OF BANK INTEREST RATES

Егоров Р. И.¹, Кайгородов С. П.²

¹Научно-исследовательский институт математики СВФУ, Якутск,
Россия; ri.egorov@s-vfu.ru

²ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия; sp.kaigorodov@s-vfu.ru

Работа примыкает к исследованиям авторов по задачам сортировки и выбора, возникающих при принятии управленческих решений [1], [2].

Пусть имеются два участника – "Банк" и его "клиенты" в количестве M лиц ($M \in \mathbb{N}$), являющиеся владельцами платежных карт. Банк выплачивает

клиентам проценты на остатки денежных сумм, имеющихся на счетах этих карт. Пусть также, D – число, превышающее максимальное значение этих сумм;

кортеж

$$\{d_0, d_1, \dots, d_p\} \quad (1)$$

- разбиение отрезка $[0, D]$, такое что $0 = d_0 < d_1 < d_2 < \dots < d_p = D$;
также кортеж

$$\{g_1, g_2, \dots, g_q\} \quad (2)$$

- процентные ставки, устанавливаемые банком, на остатки денежных сумм, $0 < g_1 < g_2 < \dots < g_q$; $q < p$; $p, q \in \mathbb{N}$.

На основании кортежей (1) – (2) Банк выбирает какой-то элемент из множества пар

$$P = \{(d_i, g_j) | d_i \in \{d_0, d_1, \dots, d_p\}, g_j \in \{g_1, g_2, \dots, g_q\}, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}\}, \quad (3)$$

т.е., если $(d_{i^*}, g_{j^*}) \in P$ то Банк выплачивает g_{j^*} процентов годовых клиентам, чьи остатки по счетам попадают в полуинтервал $[d_{i^*-1}, d_{i^*})$, $i^* = \overline{1, p}$, $j^* = \overline{1, q}$.

Предположим, что чем больше количество клиентов, получающих низкие процентные ставки из (2), по остаткам на своих счетах, тем больше отток клиентов из этого банка, т.е. M будет уменьшаться.

Целью банка является максимизация доходов после выплаты процентов на остатки денежных сумм своих клиентов.

Пусть имеется несколько функциональных зависимостей, описывающих различные сценарии оттока клиентов:

$$f_1(p), f_2(p), \dots, f_m(p), \quad p \in P, \quad (4)$$

таких, что значением $f_i(p)$ является количество клиентов Банка и их распределение по остаткам на счетах. Очевидно, что эти зависимости – монотонно убывающие, с увеличением количества клиентов, попадающих под низкие процентные ставки.

Заметим, что после выбранной Банком пары $p_k \in P$ и реализовавшегося, вследствие этого выбора сценария оттока клиентов из этого банка $f_l(p_k)$ из (4) ($l \in \{1, \dots, m\}$) можно точно вычислить значение доходов Банка от обслуживания платежных карт клиентов a_{kl} , $k \in \{1, \dots, n\}$, $n = |P|$, складывающегося из доходов, поступающих от большого числа клиентов, их суммарной денежной массы, за вычетом расходов банка по обслуживанию платежных карт клиентов.

Доказаны теоремы, содержательный смысл которых заключается в том, что при уменьшении процентных ставок g_1, \dots, g_q клиенты не заинтересованы в услугах Банка. И чем большее количество клиентов получают маленькие выплаты по процентным ставкам, тем больше отток клиентов из банка и

тем меньше денежная масса, которой оперирует Банк, для получения своего дохода. Получающийся конфликт между Банком и клиентами хорошо описывается с помощью аппарата теории матричных игр [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров Р.И., Кайгородов С.П., Местников С.В. Моделирование РЕС-задач с помощью теории игр // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14, вып. 2. С. 8–12.
2. Егоров Р.И., Кайгородов С.П. Об одном теоретико-игровом методе решения многокритериальной задачи выбора из двух объектов //Мат. заметки ЯГУ. 2009. Т. 16, вып. 2. С. 7–10.
3. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.:Наука, 1984.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ВИБРОЗАЩИТНЫМ УСТРОЙСТВОМ НА ОСНОВЕ НЕЙРОННОГО РЕГУЛЯТОРА

MATHEMATICAL SIMULATION OF A CONTROL SYSTEM OF A VIBROPROTECTIVE DEVICE ON THE BASE OF NEURAL CONTROLLER

Катковская К. В.

Новосибирская академия водного транспорта, Новосибирск, Россия;
ksumat@ngs.ru

Повышенные требования к современным машинам и оборудованию привели к необходимости развития средств виброзащиты, поскольку воздействие вибрации может повлечь возникновение аварийных ситуаций. Особенно важно уделять внимание системам управления средствами виброзащиты, так как от их особенностей и методов регулирования зависит степень их применимости. В связи с этим необходимо проводить предварительное моделирование систем управления виброзащитными устройствами с целью выявления наиболее оптимальных параметров регулирования. На сегодняшний день в качестве механизма управления принято использовать пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор (ПИД). Однако в последнее время требования, предъявляемые к регуляторам, возросли. В частности, желательно наличие таких характеристик как адаптивность и самообучаемость системы. Более того, в случае одновременного использования нескольких виброзащитных устройств, применяемых к одному защищаемому объекту, система управления должна обладать способностью параллельного регулирования. Поэтому возникает необходимость разработки новых способов управления виброзащитных устройств. Одним из таких способов является применение принципов нейроуправления.

Использование нейронных сетей при построении регулятора дает ряд преимуществ, таких как: возможность обучения на примерах и обобщения данных, способность адаптироваться к изменению свойств объекта управления и внешней среды, пригодность для синтеза нелинейных регуляторов и высокая устойчивость к повреждениям элементов благодаря изначально заложенной в нейросетевую архитектуру возможности распараллеливания [1].

Целью данной работы является моделирование системы управления виброзащитным устройством с помощью нейросетевого регулятора. В качестве объекта управления был выбран электромагнитный демпфер. Для построения модели использовался пакет математического моделирования Matlab, так как в данной среде, помимо стандартных математических функций, имеется библиотека, предназначенная для построения нейронных сетей. Используя дифференциальные уравнения, описывающие принцип действия электромагнитного демпфера, модель функционирования виброзащитного устройства можно представить в виде последовательности блоков среды Matlab [2]. Для реализации нейронного регулятора потребовалось предварительное создание нейронной сети, в состав которой вошли блок входных переменных, блок весовых коэффициентов, сумматор и блок функции активации, отвечающий непосредственно за преобразование полученных данных в ожидаемый результат. В результате удалось получить модель системы управления виброзащитным устройством. Процесс настройки весовых коэффициентов и обучения сети происходил с использованием и дальнейшим сравнением трех типов архитектур: контроллера с предсказанием, контроллера с авторегрессией со скользящим средним и контроллера на основе эталонной модели. Во всех трех случаях был получен одинаковый эффект существенного снижения амплитуды колебаний [3].

Результаты моделирования позволяют сделать вывод, что использование нейронных сетей для управления виброзащитными устройствами не только упрощает процесс их подстройки, но и помогает добиться более эффективного гашения вибрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский В. И., Богаенко И. Н., Грабовский Г. Г., Рюмин Н. А. Нейронные сети в системах автоматизации. К.: Техника, 1999.
2. Матвеева К. В. Разработка пакета моделирования виброзащитных систем судовых энергетических установок в среде Matlab // Материалы III Межвузовской научно-практической конференции студентов и аспирантов «Современные тенденции и перспективы развития водного транспорта России». СПб.: СПГУВК, 2012. С. 138–139.
3. Катковская К. В., Игнатова А. П. Построение гибридного ПИД-контроллера электромагнитного демпфера на базе нейронной сети // Сибирский научный вестник / Новосибирский научный центр “Ноосферные знания и технологии” Российской академии естественных наук. Новосибирск: Изд. НГАВТ, 2013. Вып. XVII. С. 8.

**АППРОКСИМАЦИЯ ИГРАМИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ
УПРАВЛЯЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ МАРКОВСКИХ
ПРОЦЕССОВ С ПРЫЖКАМИ¹**

**MEAN-FIELD APPROXIMATION OF CONTROLLED
NONLINEAR MARKOV PROCESSES WITH JUMPS**

Колокольцов В. Н.¹, Троева М. С.²

¹ University of Warwick, Coventry, United Kingdom;
v.kolokoltsov@warwick.ac.uk

² ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия; troeva@mail.ru

В данной работе исследуются игры среднего поля большого числа N агентов с произвольным множеством классов (типов) агентов, которые слабо связаны через эмпирические меры.

Базовая динамика типичного агента является управляемым нелинейным Марковским диффузионным процессом с прыжками. Предполагается, что прыжки могут быть как по пространственной переменной, так и во множестве классов агентов. Прыжки во множестве классов означают миграции между типами агентов.

Также предполагается, что каждый агент может управлять сносом (дрейфом) и прыжками. Ранее игры среднего поля с конечным множеством классов агентов и без прыжков между классами были исследованы в работах Кейнса и др. (см. например, [1]).

В работе показано, что любое решение предельной системы связанных “обратного” уравнения для функций (уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана) и “прямого” уравнения для вероятностных законов (уравнение Колмогорова) порождает $1/N$ -равновесие Нэша для аппроксимирующей игры N агентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huang M., Malhamé R.P., Caines P.E. Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle // Communications in Information and Systems. 2006. Vol. 6, №. 3, pp. 221-252.

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014-2016 гг. (проект №3047).

ВОЗМУЩЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА, РАЗБИВАЮЩИЕ СЛОЖНЫЙ ЦИКЛ

PERTURBATIONS OF SPECIAL FORM BREAKING UP A POLYCYCLE

Кутукова Л. Т.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
kutukova_imi@gmail.com

При построении функции последования в задаче о частичном разбиении сложного предельного цикла системы вида:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) + p(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + q(x, y)$$

встаёт вопрос об отыскании условий, которым должны подчиняться возмущения этой системы.

С помощью двух систем кривых строится единая система вложенных областей, состоящая из множества двух категорий. И доказывается следующая теорема.

Теорема 1. В плоскости с прямоугольными координатами v и w уравнением $w = \Phi(v, \alpha)$ определяется пучок кривых, проходящих через точки

$$M = \left\{ 0, \frac{g_0(p_2, q_2)}{g_0(p_1, q_1)} \right\}, \quad N = \left\{ H, \frac{g_1(p_2, q_2)}{g_1(p_1, q_1)} \right\},$$

координаты которых не зависят от α . Функция $\Phi(v, \alpha)$ (v, α) как функция переменной v , определена и непрерывна в замкнутом промежутке $0 \leq v \leq H$ каково бы ни было α ($0 < \alpha \leq \alpha^*$).

В дальнейшем предполагается поиск условий, которым должны подчиняться возмущения этой системы. Каждой паре функций $p_2(x, y)$ и $q_2(x, y)$, удовлетворяющим найденным условиям, наряду с $p_1(x, y)$ и $q_1(x, y)$, будут построены возмущения, разбивающие сложный цикл не менее, чем на два простых.

**ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ
ОПИСЫВАЮЩЕЙ ЗАГРЯЗНЕНИЕ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ**
**ON DIFFERENTIAL GAME OF MODELLING OF
ENVIRONMENTAL POLLUTION PROBLEM**

Лукин В. С.

Управления информатизации НБ РС(Я), Якутск, Россия;
lukinvasiliy@hotmail.com

В данной работе исследуется двумерная модель проблемы загрязнения замкнутого водоема, которая формализуется дифференциальной бескоалиционной игрой двух лиц с разделенной динамикой игроков и с фиксированной продолжительностью $T < \infty$.

Существование ситуаций ε -равновесия в классе стратегий кусочно-программного типа в рассматриваемой дифференциальной игре следует из результатов работ [1, 2].

В работе представлены результаты численной реализации построенной двумерной теоретико-игровой модели проблемы загрязнения окружающей среды. Численный метод, основывается на сочетании конечно-разностного метода и метода динамического программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Troeva M. Existence of equilibrium point for noncooperative differential game in Banach space. In: Simos T.E., Psihogios G., Tsitouras Ch., Anastassi Z. (eds.) Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2012). AIP Conf. Proc., 2012. vol. 1479, pp. 1234-1237.
2. Troeva M., Lukin V. On a game-theoretic model of environmental pollution problem // Advances in Dynamic Games. 2013. Vol. 13. pp. 223-236.

**ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ
МНОЖЕСТВ В ИГРЕ ПРОСТОГО ПОИСКА С НАРЯДОМ
ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ И ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ
ОБНАРУЖЕНИЯ**

**NUMERICAL CONSTRUCTION OF THE INFORMATION SETS
IN THE SIMPLE SEARCH GAME WITH A TEAM OF
PURSUERS AND ESTIMATES FOR THE DETECTION
PROBABILITY**

Местников С. В.¹, Петров Н. В.², Эверстова Г. В.³

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;*

¹mestv@mail.ru, ²stalker_pnv@mail.ru, ³mestv@mail.ru

В работе рассматриваются дифференциальные игры простого поиска. Игрок P стремится максимизировать вероятность обнаружения уклоняющегося объекта E . Смешанные стратегии ищущего определяются помощью вспомогательной игры с нарядом преследователей [1-3]. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} P: \dot{x} &= u, \|u\| \leq \alpha, x(0) = x_0, \|x_0\| = r + l, x, u \in R^2, \\ E: \dot{y} &= v, \|v\| \leq \beta, y(0) = y_0, \|y_0\| \leq r, \beta \leq \alpha, y, v \in R^2, \end{aligned}$$

где $r > 0$ - радиус области неопределенности начального местоположения игрока E , величины r , l , α , и β - параметры игры. Областью обнаружения игрока P является круг радиуса l с центром в местоположении преследователя. Для определения, какую вероятность обнаружения может гарантировать ищущий игрок, рассмотрим вспомогательную игру между прячущимся E и нарядом $\bar{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ преследователей, имеющих одинаковые характеристики, действующих как один игрок. Будем говорить, что наряд \bar{P} гарантирует k_* -обнаружение, если по крайней мере k_* , $k_* \leq k$ преследователей обнаружат убегающего.

Для этой вспомогательной определим информационное множество $\Omega^{k,k_*}(t)$, где может находиться прячущийся игрок, если его обнаружили не больше k_* преследователей из наряда \bar{P} . Если для момента времени t для вспомогательной игры с нарядом \bar{P} информационное множество $\Omega^{k,k_*}(t)$ будет пустым, то существует смешанная стратегия игрока P гарантирующая вероятность обнаружения

$$\mathcal{V} \geq \frac{k_*}{k}.$$

В работе исследованы проблемы аппроксимации и численного построения информационное множество $\Omega^{k,k_*}(t)$. Численно построены приближенные информационные множества для случаев вспомогательной игры с двумя и тремя преследователями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. Оптимальный поиск в условиях конфликта. Л., 1986.
2. Петросян Л.А., Гарнаев А.Ю. Игры поиска. СПб: Изд-во СПбГУ, 1992.
3. Зенкевич Н.А., Местников С.В. Динамический поиск подвижного объекта в условиях конфликта. // Вопросы механики и процессов управления. 1991, Т 14. С. 68–76.

К ВОПРОСУ О СТРУКТУРНО УПРАВЛЯЕМЫХ ОБРАТИМЫХ СИСТЕМАХ

TO THE QUESTION OF STRUCTURAL CONTROL SYSTEMS REVERSIBLE

Флегонтов А. В.^{1, 2}

¹Российский Государственный Педагогический Университет им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия;

²Чукотский филиал Северо-Восточного Федерального Университета им. М.К. Аммосова, Анадырь, Россия;
flegontoff@yandex.ru

Рассматривается структурный анализ некоторого класса систем, уравнения динамики которых однозначно функционально разрешимы относительно управления на заданном подпространстве. Такие системы принято называть обратимыми управляемыми системами [1]. Будем предполагать, что структура управлений для этих систем еще и определяется состоянием самой системы, как динамической системы с фиксированным управлением.

Например, рассмотрим динамическую систему 2-ого порядка с управлением u в виде

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = \Psi(u), \\ \Psi(u) = \alpha_1 y' + \beta_1 y. \end{cases} \quad (1)$$

Ее решение в конечном виде не представляет затруднений. Одна из трех форм представления решения при $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y'(x_0)$ и $a_1^2 = 4b_1$, где $a_1 = a - \alpha_1$, $b_1 = b - \beta_1$ имеет вид:

$$\begin{cases} y(x) = e^{a_1(x_0-x)/2} [(y_1 + (a_1/2)y_0)(x - x_0) + y_0], \\ \Psi(u) = e^{a_1(x_0-x)/2} [(\beta_1 - \frac{\alpha_1 a_1}{2})((y_1 + (a_1/2)y_0)(x - x_0) + y_0) + \\ + \alpha_1(y_1 + (a_1/2)y_0)]. \end{cases} \quad (2)$$

Системы такого типа обобщаются (специализируются) на широкий класс как линейных, так и нелинейных подсистем. Так, например, в классе линейных систем легко выделить подкласс подсистем

$$\begin{cases} y'' + p_1(x, a)y' + p_2(x, b)y = u, \\ u(x, y, y') = q_1(x, a_1)y' + q_2(x, b_1)y, \end{cases} \quad (3)$$

которые сводятся к вырожденному гипергеометрическому уравнению. Дискретные симметрии его представляются в виде вырожденной (содержащей сингулярности) основной кубооктаэдральной подгруппы 48 порядка бесконечной группы преобразований. При этом частные решения (3) в виде ряда Куммера [2] можно записать в элементарных функциях, либо в виде неполной гамма-функции, либо через интеграл вероятностей, либо в виде многочленов Лагерра и т.п.

При

$$p_1(x) = a, \quad p_2(x) = b; \quad q_1(x) = (a + 1 - \frac{a_1}{x}), \quad q_2(x) = (b + \frac{b_1}{x})$$

уравнение (3) примет вид уравнения 2.1.65 из справочника [2], для которого и приведены частные случаи функции Куммера. При этом получим следующие частные управлений в виде: для любых a, b

$$u = 1 + (1 + a + b)e^x;$$

для любых $a, b; a_1 = 2, b_1 = 1$

$$u = \frac{1}{2} + \frac{(1 + a + b)x - 1}{x^2} e^x \sin hx;$$

для любых $a, b; a_1 = a^1 + 1, b_1 = a^1$

$$u = \frac{a^1}{a^1 + 1} + \frac{(1 + a + b)x - 1}{x} a^1 x^{-a^1} \int_0^x e^t t^{a^1 - 1} dt;$$

для любых $a, b; a_1 = \frac{3}{2}, b_1 = \frac{1}{2}$

$$u = \frac{1}{3} + \frac{(1 + a + b)x - 1}{x} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x) = \frac{1}{3} + \frac{(1 + a + b)x - 1}{x} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^x e^{-t^2} dt;$$

для любых $a, b, b^1, n; a_1 = b^1, b_1 = -n$

$$u = -\frac{n}{b^1} + \frac{-(n + b^1) + (1 + a + b)x}{b^1(b^1 + 1) \dots (b^1 + n - 1)} x^{-b^1} e^x \frac{d^n}{dx^n} (t^{-x} x^{n+b^1 - 1}).$$

ЛИТЕРАТУРА

- Флегонтов А. В. Структурно-инвариантное моделирование сложных систем. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2012.
- Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения. М.: Физматлит, 1995.

Секция II. МЕТОДЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О КОМБИНАТОРНОМ СТРОЕНИИ
3-МНОГОГРАННИКОВ¹

NEW RESULTS ABOUT COMBINATORIAL STRUCTURE OF
3-POLYTOPES

Бородин О. В.¹, Иванова А. О.²

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; brdnoleg@math.nsc.ru

²Научно-исследовательский институт математики СВФУ, Якутск,
Россия; shmganna@mail.ru

Одной из центральных областей теории графов является раскраска графов. Развитие теории раскраски плоских графов (карт), как и теории графов в целом, было инициировано попытками решения знаменитой проблемы четырех красок, поставленной в середине XIX века. Эта проблема была решена в 1976 г. Аппелем и Хакеном, причем решение вылилось в 3700 страниц текста и основано на нескольких тысячах часов компьютерных вычислений.

Новые результаты о раскраске плоских графов основываются на установлении все более тонких структурных свойств плоских графов. Сильный результат о строении плоских графов может привести к прогрессу сразу в нескольких задачах раскраски.

В 2013–2014 гг. нами получен ряд неулучшаемых результатов о строении 3-цепей [1] и звезд при младших вершинах [2, 3] в нормальных плоских картах (НПМ), 3-граней в плоских триангуляциях [4], а также о высоте циклов длины 6 в 3-многогранниках [5]. Попутно доказан или опровергнут ряд долгое время стоявших зарубежных гипотез. А именно доказано следующее:

(1) Каждая НПМ, а также каждый 3-многогранник, содержит цепь из трех вершин, степени которых ограничены одним из следующих триплетов: $(3, 3, \infty)$, $(3, 4, 11)$, $(3, 7, 6)$, $(3, 10, 4)$, $(3, 15, 3)$, $(4, 4, 9)$, $(6, 4, 8)$, $(7, 4, 7)$ и $(6, 5, 6)$. Ни один из параметров данного описания не может быть улучшен.

(2) Каждая НПМ содержит либо $(3, 10^-)$ -ребро, либо $(5^-, 4, 9^-)$ -цепь, либо $(6, 4, 8^-)$ -цепь, либо $(7, 4, 7)$ -цепь, либо $(5; 4, 5, 5)$ -звезду, либо $(5; 5, b, c)$ -звезды с $5 \leq b \leq 6$ и $5 \leq c \leq 7$, либо $(5; 6, 6, 6)$ -звезду. Кроме того, ни один из перечисленных видов не может быть ни улучшен, ни опущен. В частности, этим усилено несколько известных результатов и опровергнута гипотеза Харанта и Йендроля (2007).

¹Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-98510, 12-01-00631 и 12-01-00448 и грантом Президента России для ведущих научных школ НШ-1939.2014.1.

(3) Лебег (1940) доказал, что каждая НПМ M_5 с минимальной степенью 5 содержит 5-вершину веса 26. Другими словами, каждая M_5 содержит 4-звезду веса не более 31 с центром в 5-вершине. Бородин и Вудал (1998) усилили 31 до точной границы 30. Мы представляем шесть M_5 таких, что каждая 4-звезда при 5-вершине имеет вес не менее 30 и для каждого из шести возможных типов $(5, 5, 5, 10)$, $(5, 5, 6, 9)$, $(5, 5, 7, 8)$, $(5, 6, 6, 8)$, $(5, 6, 7, 7)$ и $(6, 6, 6, 7)$ таких звезд, 4-звезды этого типа при 5-вершине присутствуют в точности в одной из этих шести M_5 .

(4) В 1999 г. Йендроль улучшил описание граней в плоских триангуляциях, данное Лебегом в 1940 г., за исключением триплетов $(4, 4, \infty)$ и $(4, 6, 11)$, и предположил, что точное описание имеет вид: $(3, 4, 30)$, $(3, 5, 18)$, $(3, 6, 20)$, $(3, 7, 14)$, $(3, 8, 14)$, $(3, 9, 12)$, $(3, 10, 12)$, $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 10)$, $(4, 6, 15)$, $(4, 7, 7)$, $(5, 5, 7)$, $(5, 6, 6)$. Мы даем описание, в котором каждый параметр точен: $(3, 4, 31)$, $(3, 5, 21)$, $(3, 6, 20)$, $(3, 7, 13)$, $(3, 8, 14)$, $(3, 9, 12)$, $(3, 10, 12)$, $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 11)$, $(4, 6, 10)$, $(4, 7, 7)$, $(5, 5, 7)$, $(5, 6, 6)$.

(5) В 1999 г. Йендроль и Мадараш доказали, что каждая плоская триангуляция с минимальной степенью 5 содержит 6-цикл, степени всех вершин которого не превышают 11, а Мохар и Шкековский (2003) доказали, что для 3-многогранников это значение не превышает 107. Мы доказываем, что и для 3-многогранников это значение не превышает 11, причем оценка неулучшае-ма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Borodin O. V., Ivanova A. O., Jensen T. R., Kostochka A. V., Yancey M. P. Describing 3-paths in normal plane maps // Discrete Math.. 2013. Т. 313, № 23. Р. 2702–2711.
2. Borodin O. V., Ivanova A. O. Describing $(d - 2)$ -stars at d -vertices, $d \leq 5$, in normal plane maps // Discrete Math.. 2013. Т. 313, № 17. Р. 1700–1709.
3. Borodin O. V., Ivanova A. O. Describing 4-stars at 5-vertices in normal plane maps with minimum degree 5 // Discrete Math.. 2013. Т. 313, № 17. Р. 1710–1714.
4. Borodin O. V., Ivanova A. O., Kostochka A. V. Describing faces in plane triangulations // Discrete Math.. 2014. Т. 319. Р. 47–61.
5. Borodin O. V., Ivanova A. O., Kostochka A. V. Every 3-polytope with minimum degree 5 has a 6-cycle with maximum degree at most 11 // Discrete Math.. 2014. Т. 315–316. Р. 128–134.

КОМБИНАТОРНОЕ СТРОЕНИЕ ТРИАНГУЛИРОВАННЫХ 3-МНОГОГРАННИКОВ С МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ 5¹

COMBINATORIAL STRUCTURE OF TRIANGULATED 3-POLYTOPES WITH MINIMUM DEGREE 5

Иванова А. О.¹, Никифоров Д. В.²

¹Научно-исследовательский институт математики СВФУ, Якутск,
Россия; shmganna@mail.ru

²ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия; zerorebelion@mail.ru

Интерес к строению плоских графов с минимальной степенью 5 частично объясняется их ролью в решении известной проблемы четырех красок. Важной вехой на этом пути была таблица Лебега (1940 г.), дающая приблизительное описание окружений вершин степени 5 в плоских триангуляциях с минимальной степенью 5. Для решения проблемы четырех красок Аппелю и Хакену в 1976 г. потребовалось изучить строение окрестностей второго порядка вершин степени 5, т. е. шаров радиуса 2 с центрами в 5-вершинах, тогда как таблица Лебега дает описание окрестностей первого порядка.

Как доказано Штейницем (1922 г.), конечные 3-связные плоские графы взаимно-однозначно отвечают конечным выпуклым трехмерным многогранникам, называемым 3-многогранниками. Поэтому, изучая строение плоских графов, мы изучаем, в частности, комбинаторное строение 3-многогранников.

Степень $d(v)$ вершины v в плоском графе G есть число инцидентных ей ребер; k - $, k^-$, k^+ -вершина — вершина степени k , не менее k и не более k , соответственно.

В 1904 г. Вернике доказал, что в любом плоском графе с минимальной степенью 5 существует 5-вершина, смежная с 6^- -вершиной, что в 1922 г. усилил Франклин, доказав, что любой плоский граф с минимальной степенью 5 содержит 5-вершину, смежную с двумя 6^- -вершинами.

Вершина v имеет тип (d_1, \dots, d_5) , если $d(v_i) \leq d_i$, где $v_1, \dots, v_{d(v)}$ — соседи вершины v в циклическом порядке вокруг v . Если порядок соседей в типе не важен, то над соответствующими степенями ставится черта. Следующее описание окрестностей 5-вершин в плоских триангуляциях с минимальной степенью 5, T_5 , дано Лебегом и включает результаты Вернике и Франклина:

Теорема 1. В любой плоской триангуляции с минимальной степенью 5 существует 5-вершина одного из следующих типов:

$(\overline{6}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{7}, \overline{7})$, $(\overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{9})$, $(\overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{11})$, $(5, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, 17)$, $(5, \overline{6}, \overline{6}, \overline{7}, 11)$, $(5, \overline{6}, \overline{6}, \overline{8}, 8)$,
 $(5, \overline{6}, \overline{6}, \overline{9}, 7)$, $(\overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{7}, 8)$, $(5, \overline{7}, \overline{6}, \overline{6}, 12)$, $(5, \overline{8}, \overline{6}, \overline{6}, 10)$, $(5, \overline{5}, \overline{7}, \overline{6}, 12)$, $(5, \overline{5}, \overline{7}, \overline{7}, 8)$,

¹Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-98510, 12-01-00631 и 12-01-00448 и грантом Президента России для ведущих научных школ НШ-1939.2014.1.

(5, 5, 8, 6, 10), (5, 6, 5, 7, 12), (5, 6, 5, 8, 10), (5, 7, 5, 6, 13), (5, 7, 5, 7, 10),
(5, 7, 5, 8, 8), (5, 8, 5, 6, 11), (5, 8, 5, 7, 9), (5, 9, 5, 6, 10), (5, 10, 5, 7, 8),
(5, 11, 5, 6, 9), (5, 13, 5, 7, 7), (5, 11, 5, 6, 8), (5, 17, 5, 6, 7), (5, 5, 11, 5, 13),
(5, 5, 10, 5, 14), (5, 5, 9, 5, 17), (5, 5, 8, 5, 23), (5, 5, 7, 5, 41), (5, 6, 6, 5, ∞).

Таблица Лебега в качестве следствий дает различные факты о строении плоских графов с минимальной степенью 5, допускающие улучшения. Несколько таких следствий доведено до неулучшаемых результатов, но на это потребовались десятки лет и новые идеи. В целом же нам неизвестны улучшения ни одного из параметров этой таблицы, не ухудшающие остальных ее параметров.

Лебег не дает доказательства теоремы 1, а лишь указывает его идею. Кроме того, нами были замечены явные неточности (или опечатки) в теореме 1. В связи с этим мы независимо доказали теорему 1, исправив следующие неточности: (1) в типе (5, 11, 5, 6, 8) вместо 11 должно быть 15; (2) в типе (5, 17, 5, 6, 7) вместо 17 должно быть 27; (3) в типах $(\overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{11})$ и $(\overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{7}, \overline{8})$ излишней является черта (см. [1]).

Далее с помощью дополнительных соображений мы усилили полученный нами исправленный вариант теоремы 1, заменив параметры 41, 23 и 17 в типах (5, 5, 7, 5, 41), (5, 5, 8, 5, 23) и (5, 5, 9, 5, 17) на 31, 22 и 16, соответственно

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванова А. О., Никифоров Д. В. Строение окрестностей 5-вершин в плоских триангуляциях с минимальной степенью 5 // Мат.заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, Вып. 2. С. 66–78.

ГИПЕРТОЖДЕСТВА, РАЗДЕЛЯЮЩИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ КЛОНЫ НА ТРЕХЭЛЕМЕНТНОМ МНОЖЕСТВЕ

HYPERIDENTITIES SEPARATING QUASILINEAR CLONES ON THE THREE-ELEMENT SET

Мальцев И. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия;
malcev@math.nsc.ru

Пусть $f_1^{n_1}, \dots, f_k^{n_k}$ — все функциональные символы и x_1, \dots, x_n — все предметные символы, входящие в термы T_1 и T_2 , $g_1^{m_1}, \dots, g_s^{m_s}$ — все функциональные символы и x_1, \dots, x_r — все предметные символы, входящие в термы Q_1, \dots, Q_u . Первое из выражений

$$\forall f_1^{n_1} \dots \forall f_k^{n_k} \forall x_1 \dots \forall x_n (T_1 = T_2),$$

$$\forall g_1^{m_1} \dots \forall g_s^{m_s} \forall x_1 \dots \forall x_r (Q_1 = Q_2 \vee \dots \vee Q_{u-1} = Q_u)$$

называется гипертождеством, второе — гиперформулой. Говорят, что гипертождество (гиперформула) разделяет два клона, если оно (она) истинно (истинна) на одном из них, но ложно (ложна) на другом.

Изучается проблема разделения клонов, образованных одноместными функциями и функциями, представимыми в виде

$$f(g_1(x_1) \oplus \dots \oplus g_n(x_n)),$$

где $n \geq 1$, все функции определены на множестве $\{0, 1, 2\}$, их значения при надлежат множеству $\{0, 1\}$, сложение ведется по модулю 2. Такие функции принадлежат классу функций, называемых квазилинейными. Назовем функцию указанного вида не креативной, если при подстановке в нее любой другой квазилинейной функции со значениями в множестве $\{0, 1\}$ число существенных переменных не возрастает. Существует бесконечно много клонов, в которых все отличные от селекторов функции не креативны. Подробно эти клоны, образуемая ими решетка и функции, порождающие такие клоны, описаны в работах [1-2], а гипертождства, разделяющие подобные клоны, в [4]. Имеется только конечное число клонов, содержащих креативные квазилинейные функции со значениями в множестве $\{0, 1\}$, однако они содержат в качестве подклонов клоны не креативных функций и потому устроены сложнее. Соединяя новые результаты с описанными в [4], получаем следующее утверждение.

Теорема. *Любые два клона, образованные квазилинейными функциями, определенными на множестве $\{0, 1, 2\}$, со значениями в множестве $\{0, 1\}$, можно разделить либо гипертождеством, либо гиперформулой.*

Пример. Введем следующие функции: $c_0(x)$ — константа 0, $c_1(x)$ — константа 1, \oplus — сложение по модулю 2,

$$\gamma(0) = \gamma(1) = 0, \quad \gamma(2) = 1; \quad \varphi(0) = \varphi(2) = 0, \quad \varphi(1) = 1.$$

Пусть $\mathcal{H}_{\varphi\psi}$ — клон, порождаемый функциями $\varphi(x) \oplus \gamma(y)$, $c_0(x)$, $c_1(x)$, \mathcal{G} — клон, порождаемый функциями $\varphi(x) \oplus \gamma(y)$, $\varphi(x) \oplus 1$, $c_0(x)$. Гипертождество

$$\forall F \forall G [G(F(F(G(G(x))))) = G(G(F(F(G(x)))))]$$

отделяет клон \mathcal{G} от клона $\mathcal{H}_{\varphi\psi}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Деметрович Я., Мальцев И. А. О существенно минимальных ТС-клонах на трехэлементном множестве // MTA SZTAKI Kozl. 1984. № 32. С. 115–151.
2. Деметрович Я., Мальцев И. А. О строении клона Бурле на трехэлементном множестве // Acta cybernetica. 1989. V. 9. № 1. Р. 1–25.
3. Денеке К., Мальцев И. А., Решке М. О разделимости клонов гипертождествами // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1050–1066.
4. Мальцев И. А. Гипертождества квазилинейных клонов на трехэлементном множестве // Сибирский математический журнал, 2014. Т. 55. № 2. С. 350–363.

СОСТАВ И СВОЙСТВА КЛАССОВ ПОЛИНОМОВ, СОХРАНЯЮЩИХ БЛОЧНЫЕ РАЗБИЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ МНОЖЕСТВ

COMPOUND AND PROPERTIES OF POLYNOMIAL CLASSES OF PRESERVING BLOCK PARTITIONS OF DISCRETE AND CONTINUOUS SETS

Никитин И. В.

ФГБОУ ВПО “Национальный исследовательский университет “МЭИ”,
Москва, Россия;
ivnik2012@gmail.com

В настоящей работе мы продолжаем изучение функциональных систем $P(\mathbb{A})$ полиномов с коэффициентами из фиксированного множества \mathbb{A} и их замкнутых классов. Элементы $x, y \in \mathbb{A}$, принадлежащие одному классу разбиения, называются эквивалентными и записываются в виде $x \sim y$. Функция $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}$ сохраняет разбиение множества \mathbb{A} , если из эквивалентностей аргументов $x_1 \sim y_1, \dots, x_n \sim y_n$ следует эквивалентность значений функции $f(x_1, \dots, x_n) \sim f(y_1, \dots, y_n)$.

Равномерное разбиение на блоки со сдвигом на множестве неотрицательных целых чисел определяется следующим образом: $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots, l - 1\} \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \{l + km, \dots, l + km + k - 1\}$, где k и l – параметры разбиения.

Обозначается D_{kl} .

Теорема 1. При $l \leq k$ класс $L(\mathbb{N}_0) \cap U(D_{kl})$ состоит в точности из всех констант из \mathbb{N}_0 и всех одноместных полиномов вида $x + kn, n \in \mathbb{N}_0$. При $l > k$ класс $L(\mathbb{N}_0) \cap U(D_{kl})$ состоит только из всех констант из \mathbb{N}_0 и всех селекторных функций. Система функций $\{0, 1, \dots, k - 1, x, x + k\}$ является базисом класса $L(\mathbb{N}_0) \cap U(D_{kl})$ при $l \leq k$.

Равномерное разбиение на блоки со сдвигом на множестве целых чисел определяется следующим образом: $\mathbb{Z} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \{l + km, \dots, l + km + k - 1\}$, где k и l – параметры разбиения, $0 \leq l < k$. Обозначается D_{kl} .

Теорема 2. Класс $L(\mathbb{Z}) \cap U(D_{kl})$ состоит в точности из всех констант из \mathbb{Z} , всех одноместных полиномов вида $x + kn, n \in \mathbb{Z}$ и всех одноместных полиномов вида $-x + 2l - 1 + km, m \in \mathbb{Z}$. Система функций $\{l, l+1, \dots, l+n-1, x+k, -x+2l-1\}$ является базисом класса $L(\mathbb{Z}) \cap U(D_{kl})$ при $k = 2n, n \in \mathbb{Z}$. Система функций $\{l, l+1, \dots, l+n, x+k, -x+2l-1\}$ является базисом класса $L(\mathbb{Z}) \cap U(D_{kl})$ при $k = 2n+1, n \in \mathbb{Z}$.

Равномерное разбиение на блоки на множестве рациональных и вещественных чисел определяется следующим образом: $\mathbb{A} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \{(k-1)m \leq x < km\}$, где k – параметр разбиения. Обозначается D_k .

Теорема 3. Класс $L(\mathbb{A}) \cap U(D_{kl})$, где $\mathbb{A} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, состоит в точности из всех констант из \mathbb{A} и всех одноместных полиномов вида $\frac{x}{n} + \frac{km}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$. Система функций $\{0, x-k, x+k, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{5}, \dots, \frac{x}{p}, \dots\}$, где p – простые числа, является базисом класса $L(\mathbb{Q}) \cap U(D_k)$.

Равномерное разбиение на блоки на множестве рациональных с иррациональным параметром чисел определяется следующим образом: $\mathbb{Q} = \{0 \leq x < k\} \cup \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \{(k-1)m < x < km\}$, где $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – параметр разбиения.

Обозначается D'_k .

Теорема 4. Класс $L(\mathbb{Q}) \cap U(D'_{kl})$ состоит в точности из всех констант из \mathbb{Q} и всех одноместных полиномов вида $\frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}$. Класс $L(\mathbb{Q}) \cap U(D'_{kl})$ не имеет базиса. Полной системой в нём является $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{5}, \dots, \frac{x}{p}, \dots\}$, где p – простые числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамонтов А. И. Исследование структуры замкнутых классов в функциональной системе линейных полиномов с целыми неотрицательными коэффициентами // Вестник МЭИ, М.: Изд. дом МЭИ, 2006, №6, С. 83–90.
2. Мамонтов А. И., Мещанинов Д. Г. Проблема полноты в функциональной системе линейных полиномов с целыми коэффициентами // Дискретная математика, М.: Российская академия наук, 2010, 22, вып. 4, С. 64–82.
3. Никитин И. В. Классы полиномов, сохраняющие пороговые разбиения множества целых чисел // Труды XX международной научно-технической конференции “Информационные средства и технологии”, М.: Изд. дом МЭИ, 2012, Т.1., С. 192–197.
4. Мещанинов Д. Г., Никитин И. В. Классы сохранения пороговых разбиений в функциональных системах полиномов // Вестник МЭИ, М.: Изд. дом МЭИ, 2012, №6, С. 132–141.
5. Мещанинов Д. Г., Никитин И. В. Классы полиномов, сохраняющие разбиения области определения на промежутках равной длины // Вестник МЭИ, М.: Изд. дом МЭИ, 2013, №6, С. 147–153.

СХОДИМОСТЬ ПОТОКА БИССЕКТРИС ДЛЯ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ¹

CONVERGENCE OF BISECTORS FLOW OF STRICTLY CONVEX POLYGONS

Ноговицын Д. А.¹, Шамаев Э. И.²

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

¹dulus.no@mail.ru, ²eshamaev@mail.ru

Последовательность многоугольников с m вершинами $\{A_n^1 A_n^2 \dots A_n^m\}_{n=1}^\infty$ на комплексной плоскости \mathbb{C} мы называем потоком биссектрис, если она задана рекуррентным соотношением

$$A_{n+1}^i = A_n^i + v_n^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где v_n^i — единичный вектор, направленный по биссектрисе внешнего угла $\angle A_n^{i-1} A_n^i A_n^{i+1}$. Поток, называемый потоком медиан, определяется рекуррентным соотношением (1), где вектор v_n^i равен $c A_n^i M_n^i$, где $c \in (0; \frac{1}{3}]$, M_n^i — центр масс треугольника $A_n^{i-1} A_n^i A_n^{i+1}$. Такой поток был рассмотрен в [1] как дискретный аналог аффинного укорачивающего длину кривой потока [2].

Пусть Ω_1 и Ω_2 — m -угольники с углами $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и β_1, \dots, β_m и сторонами a_1, \dots, a_m и b_1, \dots, b_m соответственно. Определим метрику

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\alpha_i - \beta_i)^2 + \sum_{i=1}^m (a_i - b_i)^2}.$$

Приведем основной результат [1].

Теорема 1, [1]. Пусть $\{\Sigma_n\}$ — поток медиан с $c \in (0; \frac{1}{3}]$ и произвольным начальным многоугольником $\Sigma_0 = B^1 B^2 \dots B^m$ таким, что хотя бы одно из условий $B^1 + B^2 e^{\pm \frac{2\pi i}{m}} + B^3 e^{\pm \frac{2\pi i}{m} 2} + \dots + B^{\pm \frac{2\pi i}{m} (m-1)} \neq 0$ верно. Тогда последовательность $\{H(\Sigma_n)\}$, где H — нормирующая периметр гомотетия, является сходящейся в метрическом пространстве с метрикой ρ . Пределом $\lim_{n \rightarrow \infty} H(\Sigma_n)$ является вписанный в эллипс многоугольник.

В этой работе доказана следующая теорема

Теорема 1. Пусть $\{\Omega_n\}$ — поток биссектрис с произвольным начальным строго выпуклым многоугольником Ω_0 . Тогда последовательность $\{H(\Omega_n)\}$, где H — нормирующая периметр гомотетия, сходится в метрическом пространстве с метрикой ρ . Пределом $\lim_{n \rightarrow \infty} H(\Omega_n)$ является правильный многоугольник.

¹Первый автор поддержан грантом Президента РФ по государственной поддержке молодых российских исследователей, МК-1526.2013.1, второй автор поддержан грантами НШ-4382.2014.1 и РFFФИ-12-01-00124а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шамаев Э. И. Дискретный геометрический поток биссектрис для выпуклых многоугольников и вопросы его сходимости // Сибирские электронные математические известия. 2013. Т. 10, С. 641–648.

О КЛОНОВОМ ПОДХОДЕ К НЕКОТОРЫМ ТЕОРЕМАМ О НЕВОЗМОЖНОСТИ

ON THE CLONAL APPROACH TO SOME IMPOSSIBILITY THEOREMS

Поляков Н. Л.

Финансовый Университет при Правительстве РФ, Москва, Российская Федерация;
gelvella@mail.ru

В теории социального выбора (см. [1]) доказан ряд результатов, обычно называемых теоремами о невозможности. Наиболее известной среди них является теорема (парадокс) Эрроу (см. [2]), которая утверждает, что не существует естественных не-диктаторских правил агрегирования, сохраняющих линейные упорядочения альтернатив. В работе [3] теорема Эрроу была распространена на значительно более широкий класс систем индивидуальных предпочтений. Нам удалось получить полную классификацию симметричных классов функций выбора, обладающих свойством Эрроу (см. [4]).

Мы используем следующую систему понятий. Пусть даны непустые конечные множества участников $X = \{1, 2, \dots, l\}$ и альтернатив A . Индивидуальной системой предпочтений каждого участника называется некоторая r -функция выбора на множестве A , где r есть некоторое положительное натуральное число, не превосходящее $|A|$, а под r -функцией выбора понимается произвольная функция \mathfrak{c} из множества $[A]^r$ всех r -элементных подмножеств множества A в множество A , которая удовлетворяет условию $(\forall B \in [A]^r) \mathfrak{c}(B) \in B$. Множество всех индивидуальных систем предпочтений обозначается символом $\mathfrak{C}_r(A)$. Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ называется симметричным если для произвольной перестановки σ множества A оно вместе с каждой функцией \mathfrak{c} содержит такую функцию c_σ , что $\forall B \in [A]^r c_\sigma(B) = \sigma^{-1}\mathfrak{c}(\sigma B)$. Профилем участников называется произвольный кортеж из $(\mathfrak{C}_r(A))^l$. Правилом агрегирования называется функция, которая каждому профилю участников ставит в соответствие коллективную систему предпочтений, т.е. некоторую функцию $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(A)$. Правило агрегирования называется нормальным, если оно каждому профилю $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \dots, \mathfrak{c}_l)$ ставит в соответствие такую r -функцию выбора \mathfrak{c} , что $(\forall B \in [A]^r) \mathfrak{c}(B) = f(B, \mathfrak{c}_1(B), \mathfrak{c}_2(B), \dots, \mathfrak{c}_l(B))$ для некоторой функции $f: [A]^r \times A^l \rightarrow A$, удовлетворяющей условию $f(B, p) \in \text{гап } p$. Правило агрегирования называется

диктаторским, если оно есть проекция. Правило агрегирования *сохраняет* множество r -функций выбора \mathfrak{D} , если для любого профиля Π коллективная система предпочтений принадлежит множеству \mathfrak{D} . Множество \mathfrak{D} *обладает свойством Эрроу*, если оно сохраняется только диктаторскими нормальными правилами агрегирования.

Для формулировки основной теоремы потребуются следующие определения. Пусть $|A| = 4$ и K есть четверная группа Клейна. Для каждого множества $p, q \in [A]^3$ существует единственная перестановка $\sigma_{p,q} \in K$, для которой $q = \sigma_{p,q}p$. Символом $\mathfrak{C}_3^K(A)$ обозначим множество всех функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_3(A)$, для которых $(\forall p, q \in [A]^3) \mathfrak{c}(q) = \sigma_{p,q}\mathfrak{c}(p)$.

Пусть теперь A есть произвольное конечное множество. Каждой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$ можно поставить во взаимно-однозначное соответствие полный ориентированный граф (*турнир*) $\Gamma_{\mathfrak{c}} = (A, E)$, где $E = \{(a, b) \in A \times A : a \neq b \wedge \mathfrak{c}(\{a, b\}) = b\}$. Множество всех функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$, для которых каждая вершина графа $\Gamma_{\mathfrak{c}}$ имеет четную (нечетную) степень захода, обозначим $\mathfrak{C}_2^0(A)$ (соответственно, $\mathfrak{C}_2^1(A)$).

Основная теорема. Для любого конечного множества A и натурального числа r любое непустое собственное симметричное подмножество \mathfrak{D} множества $\mathfrak{C}_r(A)$ не обладает свойством Эрроу в этих и только этих случаях:

- (1) $r = 2$, $|A|$ равно 0 или 1 $(\text{mod } 4)$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^0(A)$;
- (2) $r = 2$, $|A|$ равно 0 или 3 $(\text{mod } 4)$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^1(A)$;
- (3) $r = 2$, $|A| \equiv 0 \pmod{4}$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$;
- (4) $r = 3$, $|A| = 4$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_3^K(A)$.

Основной идеей доказательства является рассмотрения соответствия Галуа для классов дискретных функций. В т.н. простом случае (см. [3]) правила агрегирования, сохраняющие множество \mathfrak{D} можно отождествить с *полиморфизмами* некоторого множества предикатов. Они образуют симметричный *клон* функций, сохраняющих любой одноместный предикат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fishburn. P. The Theory of Social Choice. Princeton: University Press, 1973.
2. Arrow. K. A difficulty in the theory of social welfare // J. of Political Economy. 1950. № 58. С. 328-346.
3. Shelah. S. On the Arrow property // Advances in Applied Mathematics. 2005. № 34. С. 217-251.
4. Поляков Н.Л., Шамолин М.В. Об одном обобщении теоремы Эрроу // Доклады Академии Наук. 2014. Т. 456. № 2. С. 1-3.

СТРОГОЕ ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ И СОВМЕСТНОСТЬ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ¹

A STRICTLY PARTICULAR SOLUTION AND CONSISTENCY OF INFINITE SYSTEMS

Федоров Ф. М.¹, Иванова О. Ф.², Павлов Н. Н.³

¹Научно-исследовательский институт математики СВФУ, Якутск,
Россия; foma_46@mail.ru

^{2,3}ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
²o_buskarova@mail.ru, ³pnn10@mail.ru

В данном докладе речь пойдет об особом частном решении бесконечных систем, которое всегда существует, если исходная система совместна. Не нарушая общности предполагаем, что рассматриваемые бесконечные системы допускают гауссову форму.

Пусть дана следующая неоднородная бесконечная система в гауссовой форме в краткой записи:

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} x_{j+p} = b_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots . \quad (1)$$

Для решения бесконечной системы (1) изучены, урезанные от системы (1) методом редукции в узком смысле, конечные системы и получены их решения в виде:

$$x_j = B_{n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$B_{n-j} = \frac{b_j}{a_{j,j}} - \sum_{p=0}^{n-j-1} \frac{a_{j,n-p}}{a_{j,j}} B_p, \quad B_0 = \frac{b_n}{a_{n,n}}, \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n-j} = B(j)$ и в выражении (3) допустим предельный переход почленно, т.е. имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^n \frac{a_{j,p}}{a_{j,j}} B_{n-p} = \sum_{p=j+1}^{\infty} \frac{a_{j,p}}{a_{j,j}} \lim_{n \rightarrow \infty} B_{n-p},$$

тогда предельное значение $B(j)$ является частным решением бесконечной системы (1).

Определение. Частное решение $x_j = B(j)$ неоднородной гауссовой бесконечной системы (1) называется *строгое частным решением* системы (1).

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект №3047)

Теорема 2. Пусть существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n-j} = B(j)$. Предельный переход возможен в выражении (3) тогда и только тогда, когда совокупность чисел $B(j)$ $j = 0, 1, \dots$ является строго частным решением гауссовой системы (1).

Теорема 3. Если неоднородная гауссова система (1) совместна, то всегда существует ее строго частное решение.

Теорема 4. Неоднородная гауссова система (1) совместна тогда и только тогда, когда существует ее строго частное решение.

Необходимо отметить чрезвычайную важность следующих свойств строго частного решения.

Свойство 1. Строго частное решение неоднородной гауссовой системы (1) получено методом редукции в узком смысле. Таким образом, существование строго частного решения доказывает сходимость метода редукции в узком смысле.

Свойство 2. У однородной гауссовой системы (1) тривиальное решение является ее строго частным решением.

Свойство 3. Строго частное решение не содержит как аддитивное слагаемое нетривиальное решение соответствующей однородной системы.

В связи с этим свойством частное решение $B(j)$ и назван *строго частным решением*.

Свойство 4. Совместная гауссова система (1) всегда имеет единственное частное решение, которое выражается формулами Крамера.

Свойство 5. Главное решение бесконечной системы является ее строго частным решением.

Секция III. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ

MATHEMATICAL MODEL 3.5D CONCENTRATION OF MASS,
THE ALGORITHM AND THE CALCULATION EXPERIMENT

Glasko Y. V.¹, Volotskov M. Y.², Skachkov S. A.²

¹Scientific Research Computing Center M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; glaskoyv@mail.ru

²Russian State Geological Prospecting University, Moscow, Russia;

Inverse problem interpretation of gravitational field at the Earth's surface consists of several objects. For define of morphology and density of deposit (in our case - oil's deposit) we suggest method concentration into three-dimensional cube (3.5D problem).

Model sweeping of the density from domain Ω to sides of cube $\Gamma \equiv \partial V$ is specified by initial-boundary problem for parabolic equation. Problem concentration of mass from sides Γ into V has aim to define Ω and the density $\delta(\omega), \omega \in \Omega$. Model concentration consists of equations of the model sweeping and aim conditions. First aim condition describes distribution of density on Γ at end moment T . Second aim condition describes conservation of density: $\int_{\Gamma} \delta_{\Gamma}(s^*, T) ds^* = \int_{\Omega} \delta(\omega, 0) d\omega$. The first condition gives a priori information about the density $\delta(\omega)$, the second condition connects surface of the density on Γ at the end moment T with morphology the domain Ω .

Operator's form of the problem concentration has view:

$$Ap = \delta_{\Gamma}(s^*), s^* \in \Gamma \quad (1)$$

, where $p = \{\Omega, \delta(\omega)\}$, $\Omega = \bigcup_{j=1}^N \Omega_j \subset V$, $\delta = \{\delta_j(\omega)\}$, $j = 1, \dots, N$.

Numerical 3D sweeping realized via 6 points scheme of D. Zidarov. This approach demands from the density at most: $\delta(\omega) \in C(\Omega)$. Algorithm of the concentration is to minimization square residual of the bound density $\delta_{\Gamma}(s^*)$. In doing so, the bound density is calculating by iteration cycle computation of $\delta(\omega), \omega \in \Omega$ using method Monte-Carlo and the sweeping $\delta(\omega)$ in Γ . The domain Ω is defined by the second aim condition. The problem minimization square of residual is solved for system of nested compacts:

$$\hat{p} = \operatorname{arginf} \rho^2(Ap, \delta_\Gamma(s^*)), V \rightarrow \hat{V} \quad (2)$$

, where $\rho^2(Ap, \delta_\Gamma(s^*)) = \|Ap - \delta_\Gamma(s^*)\|_{L_2}^2$.

The process concentration is inverse the process sweeping. In case of large error at input data and deficiency of a priori information instead of residual we use Tikhonov's stabilizing functional.

We solve the problem concentration using a priori information about $\delta_\Gamma(s^*)$ for case of partial defined Ω and $\delta(\omega)$. The solving of the problem involves a two-step process. At the first step we define morphology of the domain Ω by density isolines on sides of V . At the second step we define $\delta(\omega)$ by statistical regularization.

We use additional a priori information about the domain Ω and the density ($\delta(\omega) \in [0.4 \text{ g/cm}^3; 1 \text{ g/cm}^3]$). The computing experiments is conducted in $V = [0; 1 \text{ km}] \times [0; 1 \text{ km}] \times [1/3 \text{ km}; 4/3 \text{ km}]$.

At the first step by interpreting calculated maps, we locate topology of the domain Ω as: the full-sphere minor radius puts at depth 1 km (model 1); two full-spheres at different depth (model 2); two horizontal circular cylinders (models 3,4); the topological product of full-sphere by two mutually perpendicular segments (segments are parallel X-axis and Y-axis). For less step of the grid we localize following morphology of the domain Ω : the cube is centered within the domain V ; the parallelepiped (model 7); two 1-tuply connected domains - two cubes (model 8).

At the second step of concentration we search the domain densities by (2). For exact value of the density $\bar{\delta}_\Gamma(s^*)$ error of result $\epsilon = \|\delta(\omega) - \bar{\delta}(\omega)\|_{L_2}^2 \leq 1.5\%$. For $\tilde{\delta}_\Gamma(s^*) : \delta = \|\tilde{\delta}_\Gamma(s^*) - \bar{\delta}_\Gamma(s^*)\|_{L_2}^2 \leq 5\% \quad \epsilon \leq 5\%$.

The algorithm concentration is included into software package interpretation for oilfields.

REFERENCES

1. Glasko Y.V. Models and Algorithms for Concentration of a Mass // Geophysical journal. 2013. V. 36, № 6. Pp. 174–181.
2. Glasko Y.V. One Problem of Equivalent Redistribution of a Mass // Physics of the Solid Earth. 2012. V. 48, № 2. Pp. 88–93.

TOWARDS THE MODELING LOW-FORMALIZED DOMAINS

Guzev M. A.¹, Kradin N. N.², Nikitina E. Y.³

¹*Institute for Applied Mathematics, FEBRAS, Vladivostok, Russia;*
guzev@iam.dvo.ru

²*Institute of History, Archaeology and Ethnology, FEBRAS, Vladivostok,*
Russia; kradin@mail.ru

³*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia; nikitina.eyu@dvgfu.ru*

Extraction of information from the collected data in many lowformalized domains is often carried out to study the behavior of the modeled domain objects. The difficulty of solving this problem requires the development of new methods and approaches for the analysis of the collected data. The central idea of our approach is the construction of rank distributions for the functions that define the values of characteristics and factors. Then we analyze a projection of a function on an axis defining values of parameter of characteristics or factors. It is supposed that a factor affects a characteristic, if the rank distribution of the factor coincides with the distribution of characteristic values.

The proposed approach was performed for the different subject domains: biology (identification of factors influencing the structure of populations of salmon), criminology (identification of factors affecting the state of crime, analysis of changes in the Criminal Code), bibliometrics (study of the effectiveness of scientific publications), history and archeology (solution of the problem of separation of polities based on the characteristics of their internal structure and form factors).

The analysis of the data distributions allows us to point out the lacunar area in sets of characteristics, to give recommendations for adjustments and the acquisition of new data.

РАБОТА РЕАКТОРА В ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ WORKS OF REACTOR IN FLUIDIZING BED

Абдурахимов А.

Ташкентский архитектурно строительный институт, Ташкент,
Узбекистан;
abduraximov1943@mail.ru

Рассматривается возможность стабилизации неустойчивого режима работы химического реактора с неоднородным кипящим слоем для одностадийной реакции. Определен диапазон параметра стабилизации, в котором

можно получить устойчивый режим работы реактора. Построена область устойчивости среднего стационарного режима при идеальном регулировании в зависимости от гидродинамических параметров.

Как показал анализ влияния гидродинамических параметров на режим работы реактора [1] с неоднородным кипящим слоем для адиабатического реактора ($\alpha = 0$) в случае малой интенсивности массобмена между фазами ($A \ll 1$) стационарных режимов в зависимости от значений A , B , T''_0 , β , u_1 , u_2 может быть от одного до трех, причем они соответствуют высоко температурному, среднему и низко температурному режимам T_1^{01} , T_1^{02} , T_1^{03} . Обычно нижние и верхние стационарные режимы устойчивы.

Средний стационарный режим T_1^{02} обычно оказывается наиболее целесообразным с точки зрения проведения химико-технологических процессов. Но как раз этот режим не устойчив и возникает задача его стабилизации.

Поэтому исследуем возможность стабилизации среднего режима работы реактора. При этом уравнения массо-и теплопереноса в безразмерном виде имеет [1].

Уравнения для плотной фазы

$$\frac{dZ_1}{d\tau} + u_1 \frac{dZ_1}{dx} = (1 - Z_1) g e^{-\left(\frac{\beta}{T_1}\right)} - A (Z_1 - Z_2) \quad (1)$$

$$\frac{dT_1}{d\tau} = \alpha(T_0' - T_1) + w u_1 (T_0'' - T_1) + w g e^{-\left(\frac{\beta}{T_1}\right)} \int_0^1 (1 - Z_1) dx - B (T_1 - \int_0^1 T_2 dx) \quad (2)$$

Начальные и граничные условия

$$\tau = 0; \quad Z_1(x, 0) = Z_{01}(x), \quad T_1(0) = T''(0) \quad x = 0; \quad Z_1(0, \tau) = 0 \quad (3)$$

Для разбавленной фазы

$$\frac{dZ_2}{d\tau} + u_2 \frac{dZ_2}{dx} = A (Z_1 - Z_2) \quad (4)$$

$$\frac{dT_2}{d\tau} + u_2 \frac{dT_2}{dx} = B (T_1 - T_2) \quad (5)$$

Начальные и граничные условия

$$\tau = 0; \quad Z_2(x, 0) = Z_{02}(x), \quad T_2(x, 0) = T_{02}(x) \quad (6)$$

$$x = 0; \quad Z_2(0, \tau) = 0, \quad T_2(0, \tau) = T_0'' \quad (7)$$

Здесь обозначения принимается как в работе [1].

Определении области параметров стабилизации задача сводится к выявлению корней квазиполинома шестой степени в комплексной плоскости.

Рассмотрим идеальное регулирование. Если запаздывающий аргумент $\tau = 0$ то имеем:

$$\begin{aligned}\psi(p) = & p^6 + a_{11}p^5 + a_{12}p^4 + a_{13}p^3 + a_{14}p^2 + a_{15}p + a_{16} + \\& +(a_{21}p^3 + a_{22}p^2 + a_{23}p + a_{24}) \cdot \exp(-p \setminus u_1) + \\& +(a_{31}p^3 + a_{32}p^2 + a_{33}p) \cdot \exp(-p \setminus u_1) + \\& +d(a_{41}p^4 + a_{42}p^3 + a_{43}p^2 + a_{44}p) + \\& +(a_{51}p^3 + a_{52}p^2 + a_{53}p) \cdot \exp(-p \setminus u_1)\end{aligned}\quad (8)$$

где a_{ij} – функции гидродинамических параметров реактора.

Исследование системы устойчивости проводился с помощью метода D-разбиения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдурахимов А. Об одном методе стабилизации среднего режима работы реактора.// Доклады АН РУз.,2000. №7.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ МНОГОЛЕТНЕМЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ БЕСКАНАЛЬНЫХ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

MODELING THE DYNAMICS OF THE TEMPERATURE FIELD OF PERMAFROST UNDER THE INFLUENCE OF CHANNEL-FREE UNDERGROUND PIPELINES BY FINITE ELEMENT METHOD

Акимов М. П.¹, Захаров П. Е.²

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

¹mir_akimov@mail.ru, ²zapetch@gmail.com

Рассматривается численное решение задачи Стефана, которая описывает процесс распространения тепла в многолетнемерзлых грунтах[1] при воздействии бесканальных подземных трубопроводов[2]. Расчетная область представляет собой прямоугольник с тремя сечениями трубопроводов и несколькими слоями грунтов. Для каждого слоя грунта учитывается его физические свойства[3]: теплопроводность, теплоемкость, температура замерзания, влажность и плотность. Численное решение задачи реализовано методом конечных элементов на треугольной сетке. Полученные результаты сравниваются с результатами натурных наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов А. В., Перльштейн Г. З., Типенко Г. С. Актуальные аспекты моделирования и прогноза термического состояния криолитозоны в условиях меняющегося климата // Криосфера Земли, 2010, т. XIV, № 1, С.3-12
2. Акимов М. П. Математическое моделирование взаимодействия полимерного теплопровода теплоснабжения с вечномерзлыми грунтами // Научное творчество молодежи: Материалы XV Всероссийской научно-практической конференции, Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. – Ч.1, С.258-260
3. Пермяков П. П., Романов П. Г. Тепло- и солеперенос в мерзлых ненасыщенных грунтах. Якутск: ЯФ Изд-ва СО РАН, 2000.

ГРАНИЦЫ ЗОН ТЕРМИЧЕСКОГО ВЛИЯНИЯ ПРИ СВАРКЕ ПОЛИЭТИЛЕНОВЫХ ТРУБ ВСТЫК

BORDERS OF ZONES OF THERMAL INFLUENCE at BUTT WELDING of POLYETHYLENE PIPES

Аммосова О. А.¹, Старостин Н. П.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия;

¹ ammosova_o@mail.ru

Моделирование теплового процесса сварки полиэтиленовых (ПЭ) труб при низких температурах воздуха рассматривается в работе [1], где предлагаются методики выбора продолжительности нагрева (t) торцов труб и определения размера теплоизоляционной камеры при охлаждении сварного соединения. При выборе технологических режимов сварки ПЭ труб, а также при исследовании качества сварного соединения большую роль имеет определение границы зоны термического влияния (ЗТВ), в которой происходят структурные изменения свариваемых материалов. Обычно ЗТВ определяется экспериментально путем исследованием структурных показателей. Прием предположение о том, что структурные изменения происходят при температурах выше температуры размягчения материала [2]. Математически задача сводится к отысканию наиболее удаленной отстыка кривой, в каждой точке которой достигается максимальная температура равная температуре размягчения материала 80 °С. Граница ЗТВ определяется как проекция кривой на плоскость zOr , т.е. граница не зависит от времени, при которой достигнута температура размягчения. Тем не менее, построив проекции найденной кривой на плоскости zOt и rOt , можно получить данные о времени формирования границы ЗТВ.

При минимально и максимально допустимых температурах окружающего воздуха (ОВ) рассчитаны границы ЗТВ, ограничивающие область допустимого местоположения границы (рис. 1а, б) и определено минимальное

время ее формирования (t), которое составляет 30 с. Граница ЗТВ, сформированная после нагрева с продолжительностью согласно нормативным документам при температуре ОВ -40°C показана на рис. 1в. При температурах среды ниже нормативных нагрев торцов с продолжительностью, рекомендуемой при минимальной допустимой температуре воздуха, приводит к формированию границы ЗТВ за пределами допустимой области местоположения (рис. 1в), при этом период времени ее формирования значительно сокращается, что может оказывать влияние на прочность сварного соединения. Показано, что при обеспечении одинакового местоположения границы проплавления при низких температурах ОВ и охлаждении сварного соединения в теплоизоляционной камере и без нее границы ЗТВ отличаются незначительно (рис. 1г, д). Это свидетельствует о том, что местоположение границы ЗТВ в этом случае мало зависит от температуры ОВ. Существенно отличаются периоды времени формирования ЗТВ, что подтверждает различие темпов охлаждения. Например, время формирования ЗТВ при охлаждении без теплоизоляционной камеры составляет 15 с, что в два раза превышает необходимый темп формирования. В то же время, формирование границы ЗТВ при температуре ОВ -40°C с применением теплоизоляционной камеры на этапе осадки происходит за 50 с.

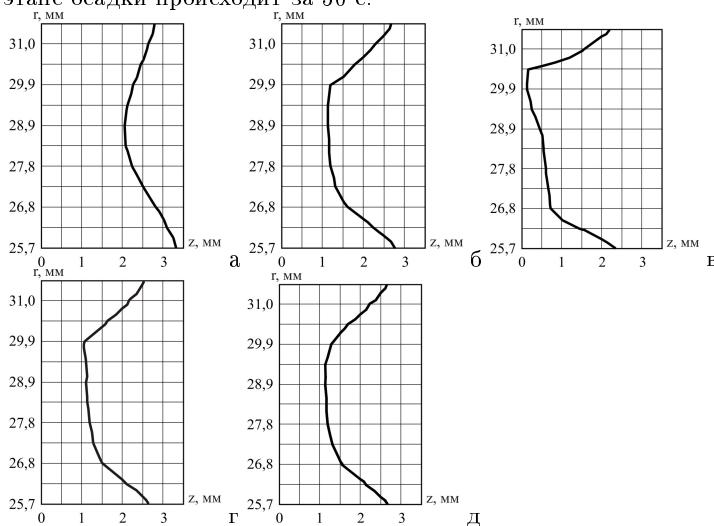


Рис. 1. ЗТВ при различных температурах ОВ: а) 20°C , $t=70$ с; б) -15°C , $t=75$ с, $t=30$ с; в) -40°C , $t=75$ с, $t=5$ с; г) -40°C , $t=96$ с, без камеры, $t=15$ с; д) -40°C , $t=96$ с, с теплоизоляционной камерой, $t=50$ с

ЛИТЕРАТУРА

1. Старостин Н.П., Аммосова О.А. Математическое моделирование теплового процесса при сварке полиэтиленовых труб встык при температурах воздуха ниже нормативных // Вестник машиностроения. 2009. № 1. С. 17-20.
2. Родионов А.К., Бабенко Ф.И., Коваленко Н.А. Трещиностойкость сварных стыковых соединений полиэтиленовых труб // Материалы. Технологии. Инструменты. 2003. Т. 8, № 3. С. 19-20.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ МУФТОВОЙ СВАРКЕ ПОЛИМЕРНЫХ ТРУБ

SIMULATION OF THE TEMPERATURE FIELD AT ELECTROFUSION WELDING OF POLYMERIC PIPES

Аммосова О. А.¹, Старостин Н. П.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия;

¹ammosova_o@mail.ru

Согласно нормативным документам сварку полиэтиленовых труб для газопроводов можно проводить при температурах окружающего воздуха (ОВ) от -5°C до плюс 40°C [1]. При более широком интервале температур сварочные работы рекомендуется выполнять в укрытиях, обеспечивающих соблюдение заданного температурного интервала. Однако такая сварка связана с большими энергетическими, непроизводительными затратами и длительной подготовкой, что недопустимо в аварийных ситуациях. Актуальной проблемой является разработка методов и средств оперативной сварки полиэтиленовых труб в зимних условиях в регионах с холодным климатом, где температуры ОВ достигают значений ниже -5°C. Теоретические результаты расчетов динамики температур хорошо совпадают с экспериментальными данными только на этапе нагрева, на этапе охлаждения достоверных сопоставлений теоретических и экспериментальных данных в литературе не приводится, что свидетельствует о недостаточной изученности процесса остывания при электромуфтовой сварке, при котором происходит формирование сварного соединения.

В силу симметрии рассматривается одна из половин соединения муфты с отрезком трубы. Предполагается, что распределение температуры по окружности любого поперечного сечения трубы и муфты однородное. Температура $T(r, z, t)$ удовлетворяет двумерному уравнению теплопроводности в цилиндрических координатах:

$$C(T) \rho(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (1)$$

$$0 < t < t_m, \quad r_1 < r < r_3, \quad 0 < z < z_{\text{муф}}, \quad r_1 < r < r_2, \quad z_{\text{муф}} < z < z_{\text{труб}}$$

где $C(T)$ – удельная теплоемкость, $\rho(T)$ - плотность и $\lambda(T)$ - коэффициент теплопроводности берутся различными в жидкой и твердой фазах, для твердой фазы с индексом 1, для жидкой – с индексом 2.

Нагревательный элемент рассматривается как сосредоточенный источник тепла. В месте расположения источника тепла решение задачи удовлетворяет условиям сопряжения;

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} |_{r_M=0} - \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} |_{r_M+0} = Q(t), \quad z_1 \leq z \leq z_2, \quad (2)$$

$$T|_{r_M=0} = T|_{r_M+0} \quad z_1 \leq z \leq z_2. \quad (3)$$

где $Q(t)$ – мощность источника.

На границе трубы и муфты задается условие идеального теплового контакта:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} |_{r_2=0} = \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} |_{r_2+0}, \quad (4)$$

$$T(r_2 - 0, z, t) = T(r_2 + 0, z, t). \quad (5)$$

На левой границе рассматриваемой области выполняется условие, вытекающее из симметрии температурного поля:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (6)$$

на правой – условие первого рода:

$$T(r, L_1, t) = T_{\text{окр}}, \quad (7)$$

На свободных поверхностях выполняются условия теплообмена с окружающей средой с температурой $T_{\text{окр}}$:

$$\lambda(T) \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_G = -a(T|_G - T_{\text{окр}}) \quad (8)$$

В начальный момент времени:

$$T(r, z, 0) = T_{\text{окр}} \quad (9)$$

Задача решалась методом конечных разностей с использованием экономичной схемы сквозного счета при следующих исходных данных: $z_1 = 0,012$; $z_2 = 0,03$; $z_{\text{муф}} = 0,048$; $z_{\text{труб}} = 0,2$; $r_1 = 0,025$; $r_2 = 0,0315$; $r_3 = 0,0395$; $r_M = 0,03175$ м; $\lambda_1 = 0,46$; $\lambda_2 = 0,24$ Вт/(м · К); $\rho_1 = 950$; $\rho_2 = 800$ кг/м³; $c_1 = 2000$; $c_2 = 2400$ Дж/(кг · К); температура плавления $T_{\text{пл}} = 128$; температура кристаллизации $T_{\text{крист}} = 111^\circ C$; $L = 177$ кДж/кг.

Мощность источника тепла вычислялась по формуле:

$$Q(t) = \frac{U^2}{R \cdot (1 + \beta(T(r_M, z, t) - 20)) S}, \quad (10)$$

где U – сварочное напряжение; R – сопротивление спирали при температуре $20^\circ C$; β - температурный коэффициент сопротивления; S - площадь поверхности источника тепла.

**ОЦЕНКА ПРОФИЛЕЙ ПОТЕНЦИАЛА СРЕДНЕЙ СИЛЫ
МЕТОДОМ UMBRELLA SAMPLING ДЛЯ
ТРАНСМЕМБРАННОГО ПЕРЕНОСА МОЛЕКУЛЫ ВОДЫ**
**POTENTIAL OF MEAN FORCE ESTIMATION FOR
TRANSMEMBRANE TRANSFER OF WATER MOLECULE
USING SERIES OF UMBRELLA SAMPLING SIMULATIONS**

Антонов М. Ю.

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
mikhail.antonoff@yandex.ru*

Моделирование пассивного трансмембранных транспорта малых молекул методами молекулярного моделирования сопряжено с рядом сложностей по той причине, что за доступные времена моделирования практически невозможно наблюдать процесс спонтанной диффузии и измерять усредненные макроскопические характеристики процесса. В связи с этим, интерес вызывает использование подходов и методов, позволяющий за достижимое время получить результат, позволяющий проводить сравнительное изучение или сравнение с натурными экспериментальными данными. Достаточно широко распространенной методикой является изучение трансмембранного транспорта с использованием методов управляемой молекулярной динамики. При этом можно получать значения «эффективной» микровязкости бислой, а также оценку коэффициента диффузии, которые можно использовать для сравнительного анализа. Недостатком этого подхода является достаточно сильная зависимость результатов от протокола вычислительного эксперимента, а также отсутствие оценки коэффициента разделения растворитель-мембрана [1,2]. В данной работе с помощью методов управляемой молекулярной динамики и метода umbrella sampling изучен процесс трансмембранного транспорта молекул воды через липидный бислой. Использован бислой димиристоил-фосфатидилхолина (ДМФХ), в силовом поле OPLS-AA. Стартовые конфигурации получены методом pull со скоростью 0.001 нм/пс, выбор стартовых конфигураций с шагом 0.5 и 1 А. Произведено сравнение получаемых профилей как при различном пространственном положении пробной

(проникающей через бислой) молекулы воды, так и при разном шаге выбора стартовых конфигураций, а также при различных начальных значениях скоростей атомов в системе. Таким образом, в рамках подхода произведена оценка кинетических параметров проникновения, а также произведена оценка профиля потенциала средней силы, произведено изучение зависимости вычисляемых значений от начальных данных эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. К.В. Шайтан, М.Ю. Антонов, Е.В. Турлей, О.В. Левцова, К.Б. Терёшкина, И.Н. Николаев, М.П. Кирпичников Сравнительное изучение молекуллярной динамики, диффузии и проницаемости по отношению к лигандам для биомембран с различным липидным составом // Биологические мембранны, 2008, 25(1). С. 75-83.
2. Антонов М.Ю., Науменкова Т.В., Левцова О.В., Шайтан К.В. Исследование динамики и трансмембранный диффузии методами компьютерного моделирования. // "Суперкомпьютерные технологии математического моделирования": труды II Международной конференции, под ред. В.И. Васильева, Якутск, Издательский дом СВФУ. С. 16-29.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ДОЛГОСРОЧНОГО РАЗВИТИЯ ЭЭС РОССИИ¹

INTEGRAL MODELS OF LONG-TERM DEVELOPMENT OF RUSSIA'S ELECTRIC POWER SYSTEM

Апарчин А. С.¹, Сидлер И. В.²

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск,
Россия;

¹apartsyn@isem.sei.irk.ru, ²krlv@isem.sei.irk.ru

В работе [1] рассматривалась интегральная модель развития электроэнергетической системы (ЭЭС) России на основе неклассического уравнения Вольтерра I рода

$$\int_{a(t)}^t K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [t_0, T], \quad x(t) = x^0(t), \quad t \in [a(t_0), t_0], \quad (1)$$

в котором $K(t, s)$ – коэффициент эффективности использования в момент t единицы мощности, введенной ранее в момент s ; $y(t)$ – экспертно задаваемая динамика располагаемой мощности; $t - a(t)$ – срок службы самого старого

¹Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 12-01-00722-а).

в момент t энергоблока; $x^0(t)$ – известная динамика вводов мощностей на $[a(t_0), t_0]$.

Уравнение (1) соответствует односекторному варианту модели В.М. Глушкова [2].

В [3] в основу моделирования развития ЭЭС положено обобщающее (1) уравнение

$$\sum_{i=1}^n \int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t, s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [t_0, T], \quad a_0(t) \equiv t, \quad a_n(t_0) \leq t_0, \quad (2)$$

в котором i -е слагаемое соответствует i -ой возрастной группе элементов системы. При этом специфика функций $a_i(t)$, определяющих существование решения и его принадлежность тому или иному классу, зависит от гипотез о динамике старения оборудования электростанций. Для некоторых частных случаев достаточные условия существования и единственности решения (2) в $C_{[t_0, T]}$ приведены в [4].

Применительно к ЭЭС России в [3] с использованием информации о вводах генерирующих мощностей с 1950 по 2009 годы дан анализ стратегий развития на перспективу до 2050 года.

В настоящей работе, в развитие результатов [3], учтены данные по вводам мощностей в 2010–2013 годах. Существенное увеличение вводов в последние годы делает реалистичной предлагаемую стратегию уменьшения к 2020 году среднего возраста генерирующего оборудования с 35 до 32 лет. Рассмотрена также постановка задачи оптимального выбора в (2) функции $a_n(t)$, определяющей динамику вывода из эксплуатации устаревшего оборудования. При этом в качестве критерия оптимизации выбран функционал суммарных затрат за $T - t_0$ (лет) на ввод нового и ремонт и эксплуатацию имеющегося оборудования, а фазовая переменная удовлетворяет интегральному ограничению (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Апарчин А. С., Карапурова И. В., Маркова Е. В., Труфанов В. В. Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики // Электричество. 2005. № 10. С. 69–75.
2. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983.
3. Апарчин А. С., Сидлер И. В. Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 3–16.
4. Apartsyn A. S. On the Theory of Non-Classical Volterra Equations of the First Kind // Book of Abstracts 4 "Inverse Problems, Design and Optimization Symposium". Albi, France. 2013. P. 181.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ РОЗНИЧНОЙ ТОРГОВЛИ НА ТЕРРИТОРИИ МЕГАПОЛИСА¹

THE EVOLUTIONARY MODELING OF MEGAPOLIS RETAILING

Берке В. С.

ФГАОУ ВПО "Дальневосточный федеральный университет",
Владивосток, Россия;
berke.vs@dvfu.ru

В модели фирма характеризуется форматом торговли[1], применяемой ею технологией \bar{S}_m , которая описывается парой коэффициентов затрат (ak_m, al_m), где ak_m – доля затрат капитала, al_m – доля затрат труда, численностью сотрудников L площадью торгового зала и объёмом основного капитала K . Состояние отрасли в период t – это список состояний фирм во времени t .

Поиск новой технологии происходит следующим образом. Для каждого формата задается постоянное множество технологических возможностей[2]. Фирма может вести поиск только среди технологий, заданных для ее формата. Для любой фирмы, занятой таким обследованием, поиск локален в том смысле, что распределение вероятностей того, что найдено, сосредоточено на технологиях, близких текущей. Занятая поиском фирма может присматриваться к тому, что делают другие фирмы, использующие тот же формат торговли, что и она.

Поиск технологии происходит в следующей последовательности: Фирмы делятся на имитаторов и новаторов. С вероятностью IM фирма является имитатором, при этом поиск происходит так:

$$S'^t_i : \xi = \left\{ \bar{S}_m, \bar{S}_m \in [\bar{S}_1, \bar{S}_{OT}], P(\xi = \bar{S}_m) = \frac{\sum_{j=1}^{N_t} Q_j^t(\bar{S}_m)}{\sum_{j=1}^{N_t} Q_j^t} \right\},$$

$$i = \overline{1..N_t}, t = \overline{1..n},$$

где Q_j^t – доход j -ой фирмы, использующей технологию S_m в период t .

С вероятностью $(1 - IM)$ фирма самостоятельно ищет технологию:

$$S'^t_i : \xi = \left\{ \bar{S}_m, D(\bar{S}_i^t, \bar{S}_m) \in [-D, D], P(\xi = \bar{S}_m) = \frac{1 - R}{D(\bar{S}_i^t, \bar{S}_m)} \right\},$$

$$i = \overline{1..N_t}, t = \overline{1..n},$$

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (государственное задание № 2014/36).

где $D(\bar{S}_i^t, \bar{S}_m)$ – расстояние между технологиями \bar{S}_i^t и \bar{S}_m .

Если фирма нашла новую технологию, то она проверяет её на прибыльность:

$$K_i^t \cdot ak_i^t + L_i^t \cdot al_i^t < K_i^t \cdot ak'^t_i + L_i^t \cdot al'^t_i$$

Если технология выдерживает данный тест, то она принимается, иначе остаётся старая технология.

Данная модель была апробирована на примере розничной торговли г. Владивостока. Исходные данные для моделирования были составлены на основе статистической информации[4,5] и экспертных оценок.

На основании проведенного анализа результатов моделирования можно сделать вывод, что модель адекватно отражает динамику основных показателей розничной торговли города Владивостока. Следовательно, модель может быть использована для прогнозирования развития розничной торговли. Стоит отметить важную особенность эволюционного подхода, позволяющего моделировать динамику процессов мезо- и макро-уровня экономики с учетом процессов, протекающих на микро-уровне экономики. Полученные результаты подтверждают эффективность использования эволюционного подхода для моделирования макро-экономической динамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агафонова М. Н. Оптовая и розничная торговля. М: Бератор-Пресс, 2002.
2. Макаров В. Л. О применимости метода эволюционной экономики // Вопросы экономики. 1997 № 3. С. 23–38.
3. Нельсон Р., Уинтер С. Эволюционная теория экономических изменений. М: Дело, 2002.
4. Приморский край в цифрах. Статистический сборник. Владивосток: Приморскстат, 2009.
5. Владивосток в 20011 году (сборник) Экономико-статистическая информация по городу Владивостоку. Владивосток: Приморскстат, 2012.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ
ПРИРОДНОГО ГАЗА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ДВОЙНОЙ
ПОРИСТОСТИ**

**NUMERICAL SIMULATION OF NATURAL GAS FILTRATION
ON THE BASIS OF DOUBLY POROSITY MODEL**

Бондарев Э. А.¹, Григорьев А. В.²

¹ Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия;
bondarev@ipng.yusn.ru

² ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия; re5itsme@gmail.com

Россия является крупнейшим поставщиком и мировым лидером по запасам газа. На практике часто встречаются газоносные пласти с наличием развитой системы трещин. При моделировании подобных пластов возникает необходимость учитывать систему трещин. Для этого данный пласт рассматривается как трещиновато-пористая среда (концепция вложенных сред). Трещиновато-пористая среда рассматривается как система поровых блоков разделенная системой трещин. Газ насыщает как поровые блоки, так и трещины. Основные запасы газа хранятся в поровых блоках, трещины, в свою очередь, отвечают за перенос данных запасов. Описанные свойства структуры пустотного пространства трещиновато-пористой среды часто называют средой с двойной пористостью, которая отражена в работах Баренблатта, Желтова, Кочиной. Заметим, что за механизм перетока между трещинами и пористыми блоками отвечает разность давлений. Рассматриваются модели двойной пористости, которые представляют из себя систему двух связанных уравнений параболического типа. Основным вариантом данного класса моделей является модель Баренблатта, в которой связь между уравнениями осуществляется через обменный переток между средами. Моделирование природного газа имеет свои особенности. Обсуждается обобщение модели двойной пористости для случая фильтрации газа.

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ
ДВУХГРУППОВОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ НЕЙТРОНОВ
В ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

**FINITE ELEMENT METHOD FOR TWO-GROUP NEUTRON
EQUATION IN HEXAGONAL GEOMETRY**

Вабищевич П. Н¹, Васильев А. О.²

¹ Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН,
Москва, Россия; vabishchevich@gmail.com

² ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия; haska87@gmail.com

Хотя люди по-прежнему ищут эффективные способы эксплуатации возобновляемых источников энергии, атомные электростанции продолжают играть важную роль в качестве источника энергии в мире. Так как невозможно экспериментально проверить безопасность в случае неисправности или аварии, численные моделирования ядерных реакторов имеет первостепенное значение. Моделирование активной зоны реактора, как правило, разделяют на термогидравлическую модель, которая описывает поток тепла в охлаждающей жидкости реактора и на уравнение нейтронного баланса, описывающая ядерное деление в топливных стержнях. Стандартной моделью для описания баланса нейтронов в ядерном реакторе, является уравнение диффузии нейтронов. Рассматривается двухгрупповое уравнение диффузии нейтронов в гексагональной геометрии. Решением данного уравнения является эффективный коэффициент размножения нейтроной, который является мерой критичности реактора. Для численного решения используется метод конечных элементов с помощью вычислительного пакета Fenics, а для построения и генерации сетки пакет Gmsh.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганев И. Х. Физика и расчет реактора. Москва: Энергоатомиздат, 1992.
2. Chao Y. A., Shatilla Y. A. Conformal mapping and hexagonal nodal methods-II: Implementation in the ANC-H Code. Nuclear Science and Engineering, 121. 1995, pp. 210–225.
3. Anders Logg, Kent-Andre Mardal, Garth N. Wells. Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method. The FEniCS Project, 2011.
4. <http://www.geuz.org/gmsh/>
5. <http://www.grycap.upv.es/slepc>

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНО ПОПОЛНЯЕМОЙ ПОПУЛЯЦИИ

MODELING OF CONTINUOUSLY RECHARGED POPULATION

Васильев М.Д.¹, Трофимцев Ю.И.²

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени

М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

¹1767700@mail.ru, ²trofimtsev@mail.ru

Рассматривается система двух дифференциальных уравнений, описывающая развитие популяции при наличии охраняемой территории:

$$\begin{cases} \dot{x} = gx + d_1(y - x) - hx^2 - b, \\ \dot{y} = ay + d_2(x - y) - cy^2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x и y – численности популяции, a и g – коэффициенты прироста популяции, c , h – коэффициенты внутривидовой конкуренции, соответственно, на охраняемой территории и вне её; d_1 и d_2 – коэффициенты обмена между охраняемой территорией и остальной частью ареала; b – величина добычи популяции вне охраняемой территории. Коэффициент g – любое действительное число, все остальные коэффициенты положительны.

Изучается случай, когда в системе члены $d_1(y - x)$ и $d_2(x - y)$ имеют виды d_1y и $-d_2y$. Это означает, что происходит непрерывное пополнение неохраняемой субпопуляции за счет субпопуляции на охраняемой территории. При этом будем предполагать, исходя из условия невымирания охраняемой субпопуляции, что $a - d_2 > 0$.

Целью работы является изучение возможных расположений траекторий системы (1) при различных значениях параметров системы.

В отличие от случая, рассмотренного в [1], количество особых точек в системе (1) может изменяться от 0 до 4. Это седло в точке $M_1\left(\frac{g+\sqrt{g^2-4hb}}{2h}, 0\right)$, неустойчивый узел в точке $M_2\left(\frac{g-\sqrt{g^2-4hb}}{2h}, 0\right)$, устойчивый узел в точке $M_3\left(\frac{g+D}{2h}, \frac{a-d_2}{c}\right)$ и седло в точке $M_4\left(\frac{g-D}{2h}, \frac{a-d_2}{c}\right)$. Здесь $D = \sqrt{g^2 - 4h(b - \frac{d_1(a-d_2)}{c})}$.

Точки $K\left(\frac{g}{2h}, 0\right)$, $L\left(\frac{g}{2h}, \frac{a-d_2}{c}\right)$ получаются в предельных случаях, когда точки M_1 и M_2 , точки M_3 и M_4 стягиваются в одну точку – седло-узел.

Таким образом, в системе имеются два бифуркационных параметра $b = \frac{g^2}{4h}$, $b = \frac{g^2}{4h} + \frac{d_1(a-d_2)}{c}$, изменения знаков которых приводят к изменению фазовых портретов траекторий.

При $g < 0$ может существовать только одна особая точка – устойчивый узел, или особых точек вообще не будет. Бифуркационный параметр также будет только один. Таким образом, при пополнении вырождающейся популяции имеется только два варианта её развития во времени.

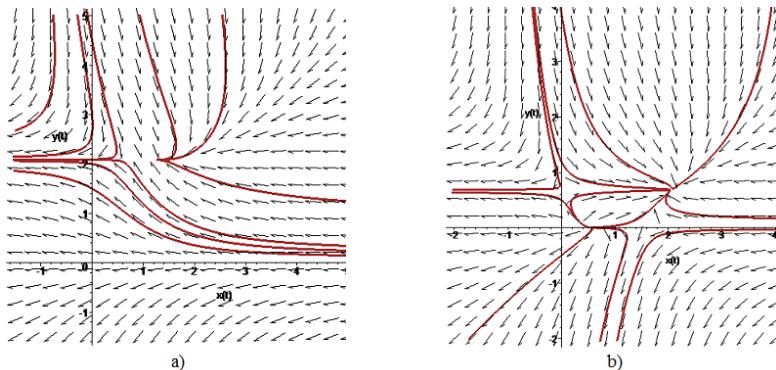


Рис 1.

a) $g = 2, a = 4, d_1 = 1.4, d_2 = 1.5, h = 1, c = 1.2, b = 3.92, L(1, 2.083)$ - седлоузел;

b) $g = 2.5, a = 3, d_1 = 1.4, d_2 = 1.5, h = 1.2, c = 2.2, b = 1, M_1(1.543, 0)$ - седло, $M_2(0.54, 0)$ - не устойчивый узел, $M_3(2.065, 0.682)$ - устойчивый узел, $M_4(0.018, 0.682)$ - седло

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев М.Д., Григорьев М.П., Трофимцев Ю.И. Создание охраняемой территории: моделирование динамики популяции и оценка затрат // Математические заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, № 2. С. 222–236.

**УПРОЩЕННАЯ ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВОГО
ПРОЦЕССА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ
ТЕПЛООБРАЗОВАНИЯ В ПОЛИМЕРНЫХ ПОДШИПНИКАХ
СКОЛЬЖЕНИЯ**

**SIMPLIFIED 3D MODEL OF THERMAL PROCESS AND
DEFINITION OF HEAT GENERATION FUNCTION IN
POLYMER SLIDING BEARING**

Васильева М. А., Кондаков А. С., Старостин Н. П.¹

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия;

¹eowa@mail.ru

Температурное поле в подшипнике скольжения будем рассматривать в неподвижной цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Примем допущение об однородности распределения температуры по длине подшипника и корпуса. Тогда в пределах зоны контакта с втулкой распределение температуры на поверхности вала по осевой координате также необходимо считать однородным и определять путем осреднения истинного распределения. Действительно, результаты расчетов показывают, что при длине втулки 2 см разница между максимальной и минимальной температурой по осевой координате составляет $1 - 2^\circ\text{C}$ [1]. Отклонение истинной температуры поверхности вала от осредненной в пределах длины втулки не превысит $0,5^\circ\text{C}$. По угловой координате в зоне контакта вала распределение температуры будет неоднородным.

Температурное поле $U(r, \varphi, z, t)$ в вале описывается трехмерным уравнением теплопроводности с конвективным членом, учитывающим вращение вала:

$$C_1(U) \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_1(U) \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda_1(U) \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \Omega(t) C_1(U) \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_1(U) \frac{\partial U}{\partial z} \right). \quad (1)$$

Распределение температуры $T(r, \varphi, t)$ во втулке с обоймой описывается двумерным уравнением теплопроводности с разрывами коэффициентов $C_p(T)$, $\lambda_p(T)$ на границе сопряжения втулки с обоймой при $r = R_2$:

$$C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_p(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda_p(T) \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right), \quad (2)$$

$p = 2$ - для втулки, $p = 3$ - для обоймы.

В контактной зоне записывается условие равенства суммарного теплового потока от трения сумме тепловых потоков, идущих во втулку и вал

$$\lambda_1(U) \left. \frac{\partial U(r, \varphi, z, t)}{\partial r} \right|_{r=R_2} - \lambda_2(T) \left. \frac{\partial T(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=R_1} = \frac{Q(\varphi, t)}{S}, \quad (3)$$

где $S = 2\varphi_0 R_1 l_4$, $|\varphi| \leq \varphi_0$, $L_1 \leq z \leq L_2$, и условие равенства температуры втулки и осредненной по осевой координате температуры вала

$$T(R_1, \varphi, t) = \int_{L_1}^{L_2} U(R_{V2}, \varphi, z, t) dz / (L_2 - L_1), \quad |\varphi| \leq \varphi_0. \quad (4)$$

Начальное и граничные условия остаются такими же, как в работе [2]. Данная прямая задача (1) – (4) решается численно методом расщепления по пространственным переменным, заключающимся в поэтапном решении одномерных разностных уравнений.

Для тепловой диагностики трения рассматривается граничная обратная задача тепловой диагностики трения с использованием упрощенной модели (1) – (4). Приводятся результаты сравнения распределений температур, полученных решением прямых задач с использованием двумерного и упрощенной трехмерной тепловых моделей. Для оценки эффективности разработанного метода тепловой диагностики трения проведена экспериментальная проверка восстановления по замерам температуры силы трения, изменяющейся во времени

ЛИТЕРАТУРА

1. Флоке А., Плей Д. Температуры в зоне контакта в несмазываемых подшипниках. Трехмерная теория и ее проверка // Проблемы трения и смазки. 1981. №2. С. 61-71.
2. Старостин Н. П., Кондаков А. С., Васильева М. А. Тепловая диагностика трения в радиальных подшипниках скольжения с учетом скорости и характера движения вала // Трение и износ. 2012. Т. 33, №5. С. 454–464.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДОГРЕВА НАГРЕТЫМ ВОЗДУХОМ ДЛИННОМЕРНЫХ ПОЛИЭТИЛЕНОВЫХ ТРУБ

SIMULATION OF HEATING BY HEATED AIR OF LONG LENGTH POLYETHYLENE PIPES

Васильева М. А., Старостин Н. П.¹

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия;
¹eowa@mail.ru

Согласно нормативным документам, разматывание длинномерных полиэтиленовых труб для газопроводов их бухт осуществляется при температуре наружного воздуха не ниже плюс 10°C. При более низкой температуре наружного воздуха трубы в бухтах подогревают до требуемой температуры, размещая их на время не менее 4 часов в отапливаемое помещение или разогревают при помощи воздуходувной машины до достижения температуры наружной и внутренней поверхности бухты не ниже (15±5)°C [1].

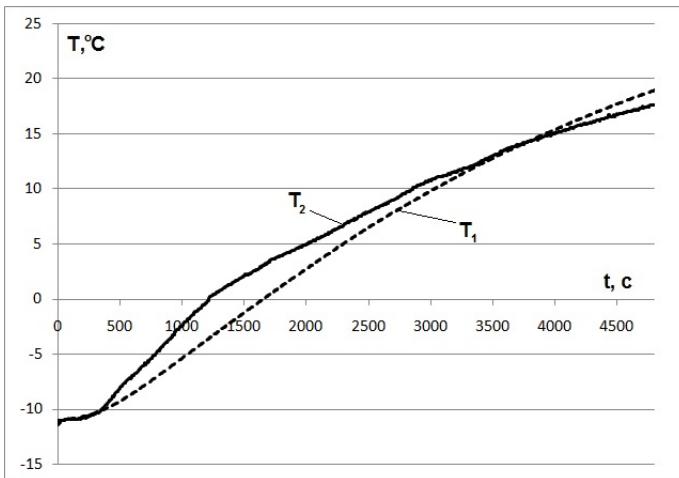


Рис. 1. Сопоставление расчетных T_1 и экспериментальных T_2 зависимостей температур в точке ($R_2, 100$)

В данной работе предлагается упрощенная математическая модель теплового процесса подогрева нагретым воздухом длинномерной полиэтиленовой трубы в бухте, имеющей температуру наружного воздуха, и укрытой воздухонепроницаемым материалом (полиэтиленовой пленкой). В модели учитывается охлаждение по длине трубы подаваемого нагретого воздуха за счет теплоотдачи в стенку трубы. Подогрев бухты с трубой осуществлялся под укрытием с температурой 20°C . Температура подаваемого нагретого воздуха равна 60°C , окружающего воздуха равна минус 12°C . Скорость потока подаваемого воздуха равна 8 м/с. Поставленная задача решается методом конечных разностей с использованием расщепления по пространственным переменным и физическим процессам [2]. Расчетами показано, что продолжительность подогрева, определяемое временем необходимым для достижения в стенке на конце трубы температуры 15°C , составляет 1ч. 35 мин (рис. 1).

Предложенная математическая модель может быть использована для прогнозирования продолжительности подогрева трубы в бухте при различных температурах окружающего воздуха. Предлагаемый подход приближенного расчета изменения температуры стенки труб при вынужденном течении воздуха в круглой трубе может быть использован для расчета продолжительности подогрева полиэтиленовых труб различного типоразмера.

ЛИТЕРАТУРА

1. СТО 45167708-01-2007. Проектирование и строительство полиэтиленовых газопроводов давлением до 1,2 МПа и реконструкция изношенных газопроводов. Стандарт организации, ЗАО «Полимергаз», М., 2007.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕНАСЫЩЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

ON A PROBLEM OF UNSATURATED FILTRATION WITH UNKNOWN BOUNDARIES

Гамзаев Х. М.

Азербайджанская государственная нефтяная академия, Баку,
Азербайджан;
han.h@rambler.ru

Рассматривается нелинейное уравнение параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(w) \frac{\partial w}{\partial z} \right) - k'(w) \frac{\partial w}{\partial z}, \quad 0 < z < s(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

в области с неизвестной подвижной границей $s(t)$, со следующими условиями

$$-D(w) \frac{\partial w}{\partial z} + k(w) = q(t), \quad z = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$w(z, t) = w_s, \quad z = s(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

где $s(0) = 0$, $s'(t) > 0$, $t > 0$. Функции w_s , $k(w)$, $D(w)$, $q(t)$ считаются заданными. Задача (1) – (3) описывает фильтрации жидкостей в пористой среде с частичным насыщением, а также инфильтрации – проникновения в почву слоя жидкостей, разлитых по поверхности земли.

Учитывая, что закон перемещения подвижной границы неизвестен, задается дополнительное условие на известной части границы

$$w(z, t) = w_p(t), \quad z = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (4)$$

Задача заключается в определении функций $w(x, t), s(t)$, удовлетворяющих уравнению (1) и заданным условиям (2) – (4). Задача (1) – (4) относится к классу краевых задач со свободной границей. Однако из-за того, что дополнительное условие задано на известной части границы, задача (1) – (4) является некорректной.

Для численного решения поставленной некорректной задачи построен разностный аналог задачи и предложен безытерационный алгоритм решения полученной системы разностных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова–Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
2. Richards L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums// App. Physics, 1931, v.1, №5, p.318-322.
3. Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М.: Издательство Московского университета, 1987.
4. Гамзаев Х.М. Численный метод решения обратной задачи поршневого вытеснения нефти из пласта водой// Инженерно-физический журнал, 2012, том 85, №5, с. 925–930.

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА
NONSTATIONARY COMPLEX HEAT TRANSFER PROBLEM**

Гренкин Г. В.^{1,2}, Чеботарев А. Ю.^{1,2}

¹Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия;
glebgrenkin@gmail.com

²Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
cheb@iam.dvo.ru

Эволюционная нормализованная диффузационная модель, описывающая радиационный, кондуктивный и конвективный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, имеет следующий вид [1, 2]:

$$\partial\theta/\partial t - a\Delta\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad (1)$$

$$\nu\partial\varphi/\partial t - \alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T). \quad (2)$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, \mathbf{v} – заданное поле скоростей, κ_a – коэффициент поглощения, a , b , α – положительные числа.

Будем предполагать, что функции θ , φ , описывающие процесс сложного теплообмена, удовлетворяют следующим условиям на границе $\Gamma = \partial\Omega$ и начальным условиям:

$$a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \quad (4)$$

Здесь через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали \mathbf{n} . Неотрицательная функция θ_b , функции $\beta = \beta(x)$, $\gamma = \gamma(x)$, $x \in \Gamma$, описывающие, в частности, отражающие свойства границы, и начальные функции θ_0 , φ_0 являются заданными.

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

- (i) $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.
- (ii) $\beta, \gamma \in L^\infty(\Sigma)$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, $\beta_0, \gamma_0 = \text{const}$, $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Sigma)$.
- (iii) $0 \leq \theta_0, \varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$.
- (iv) $\beta + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \geq 0$ на той части Σ , где $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) < 0$. Здесь $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$.

Результаты данной работы заключаются в доказательстве существования и единственности решения рассматриваемой системы. Кроме того, установлены достаточные условия асимптотической устойчивости по Ляпунову для данной динамической системы.

Для доказательства существования и единственности решения получены априорные оценки, означающие, что всякое решение системы ограничено. С помощью принципа сжимающих отображений можно доказать локальную по времени разрешимость. Так как априорные оценки не зависят от длины интервала существования локального решения, локальное решение можно продолжить на весь интервал $(0, T)$.

Обозначим $Q = \Omega \times (0, T)$, $V = H^1(\Omega)$, $W = \{y \in L^2(0, T; V) : dy/dt \in L^2(0, T; V')\}$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда на любом конечном промежутке времени $[0, T]$, $0 < T < \infty$ задача (1)–(4) однозначно разрешима, а слабое решение задачи (1)–(4) ограничено в $L^\infty(Q) \cap W$ и удовлетворяет неравенствам $0 \leq \theta \leq M$, $0 \leq \varphi \leq M^4$, где $M = \max \left\{ \|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/4} \right\}$.

Получены достаточные условия устойчивости, которые означают, что стационарное температурное поле θ_s имеет малый разброс значений.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (i)–(iv), $0 \leq \mu_1 \leq 4\theta_s^3 \leq \mu_2$, величина $(\mu_2 - \mu_1)$ достаточно малая и $\|\theta_0 - \theta_s\|$, $\|\varphi_0 - \varphi_s\|$ малые. Тогда существует единственное решение $\{\theta, \varphi\} \in L^\infty(0, +\infty; H) \cap L^2_{loc}(0, +\infty; V)$, такое, что $\|\theta - \theta_s\|^2 + \|\varphi - \varphi_s\|^2 \leq Ce^{-kt}$, $k > 0$.

Вопрос об устойчивости стационарных решений задачи сложного теплообмена, для которых не выполняются указанные достаточные условия, является пока открытым. Проведенная серия вычислительных экспериментов показала существование стационарных полей, для которых достаточные условия устойчивости не выполняются, но, тем не менее, решение эволюционной задачи стабилизируется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Modest M. F. Radiative Heat Transfer. Academic Press, 2003.
2. Boas D. A. Diffuse photon probes of structural and dynamical properties of turbid media: theory and biomedical applications. A Ph.D. Dissertation in Physics. University of Pennsylvania, 1996.

**УЧЕТ ВЯЗКОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО И ЖИДКОГО ЯДЕР ЗЕМЛИ,
ВЫЗВАННЫХ ПРИЛИВНЫМ ДЕФОРМИРОВАНИЕМ¹**

**ON VISCOSITY IN THE MATHEMATICAL MODEL OF THE
EARTHS INNER AND LIQUID CORES MOTIONS CAUSED BY
TIDAL DEFORMATION**

Григорьев Ю. М.

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.
Аммосова", Якутск, Россия;
grigyum@yandex.ru*

Движения жидкого и твердого ядер Земли играют существенную роль в различных геофизических процессах. В частности, по теории "геомагнитного динамо" магнитное поле Земли образуется за счет этого движения проводящих масс. В 1996 г. [1] было открыто явление дифференциального вращения твердого ядра Земли, приведена оценка явления - ядро проворачивается относительно мантии примерно на 2 градуса за год. Изучению этого и других явлений, происходящих внутри Земли, посвящено множество работ. Есть три подхода к изучению проблем динамики внутренних масс Земли. Первый - обработка сейсмических данных. Именно этим подходом получены данные, которые интерпретированы как результат дифференциального вращения твердого ядра Земли (Song X., Richards P.G., Овчинников В.М., Адушкин В.В., Ан В.А. и др.). Однако возможны и другие интерпретации этих же данных (A. Souriau, R. Garcia, G. Poupinet), из которых не следует факт дифференциального вращения ядра Земли. Ряд авторов придерживается мнения, что имеет место западный дрейф твердого ядра Земли. Второй подход - упомянутое выше лабораторное моделирование (А.Ф. Ревуженко). Такой метод позволяет получать только качественные результаты. И наконец, третий подход, - метод математического моделирования (Овчинников В.М., Адушкин В.В., Ан В.А., Решетняк М.Ю., Ревуженко А.Ф., Григорьев Ю.М., Жаров В.Е., Пасынок В.Е., Вильке В.Г., Баркин Ю.В., Шайдуров В.В.). Такой подход может дать какие то количественные результаты по данной проблематике. Для получения полной картины ситуации представляется необходимым учитывать результаты всех трех методов, как взаимодополняющих друг друга. Судя по последним публикациям, оценка величины скорости дифференциального вращения ядра Земли, получаемая сейсмическими методами, упала до долей градуса в год (R. Deguen). Теоретических оценок данного явления практически нет. В связи с этим актуальным является разработка математических моделей приливных деформаций Земли, которые вызывают перенос ее внутренних масс. В работах [2, 3] построены кинематические двумерные

¹Работа выполнена по гранту РФФИ № 12-01-00507-а.

модели, которые описывают вклад приливных деформаций на величину восточного дифференциального вращения твердого ядра Земли. В этих моделях на границе твердого и жидкого ядер Земли задавалось условие полного прилипания.

В данной работе разработана двумерная модель переноса внутренних масс Земли приливными деформациями с учетом наличия ее твердого ядра и условием частичного проскальзывания на границе твердого и жидкого ядер. В предложенное граничное условие входят вязкость жидкого ядра Земли, один размерный и один безразмерный параметры. Вычислительная реализация модели проведена методом малого параметра до первого порядка малости. Выявлено, что в этом порядке приближения вязкость жидкого ядра Земли не оказывает влияния на угловую скорость дифференциального вращения. Оценка величины дифференциального вращения твердого ядра Земли модели с условием частичного проскальзывания составила 0,39 мин/год с восточным направлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Song X., Richards P. G. Seismological evidence for differential rotation of the Earth's inner core // Nature. 1996. V. 382. P. 221–224.
2. Григорьев Ю. М., Скрябина О. Е. Математическое моделирование относительной динамики твердого и жидкого ядер Земли // Вестник СибГАУ. 2008. № 4(21). С. 68–72.
3. Григорьев Ю. М., Мохнатчевский А. Н., Скрябина О. Е. О вкладе приливного деформирования на дифференциальное вращение внутреннего ядра земли // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № , часть 5. С. 2118–2119.

**РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО И КОМПЬЮТЕРНОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ
КОМПОЗИЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ТРЕБУЕМЫМ
КОМПЛЕКСОМ СВОЙСТВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ УПРУГИХ,
СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН¹**

**DEVELOPMENT AND APPLICATION OF MATHEMATICAL
AND COMPUTER MODELING FOR SOLVING OPTIMAL
DESIGN OF COMPOSITE STRUCTURES**

Гусев Е. Л.^{1,2}

¹ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

²Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия;
elgusev@mail.ru

Методами математического и компьютерного моделирования проведено исследование вариационных постановок задач оптимального синтеза физико-механической и геометрической структуры композиционных материалов и конструкций с требуемым комплексом свойств при волновых воздействиях. На основе конструктивного анализа необходимых условий оптимальности установлены качественные закономерности взаимосвязи параметров в композиционных конструкциях, реализующих предельные возможности по достижению требуемого комплекса свойств при волновых воздействиях.

Широкий круг задач, связанный как с решением проблем сейсмологии, сейсмостойкого строительства сложных технических систем, так и проблем современного приборостроения, связанных со все возрастающим применением композиционных материалов, приводит к необходимости исследования, как в прикладном, так и в теоретическом аспектах, возможности наиболее эффективного управления энергетическими характеристиками волновых процессов на основе направленного выбора геометрической и физической структуры композиционных конструкций [1-3].

Одной из важных задач исследований является учет слоистости грунтового основания. В последние десятилетия в исследованиях авторов, посвященных проблемам сейсмостойкости, наблюдается тенденция учета все большего числа слоев при изучении взаимодействия сейсмических волн с конструкциями различного назначения. Однако исследование явлений, возникающих при взаимодействии сейсмических волн с достаточно большим

¹Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований - грант № 13-08-00229.

числом слоев приводит к значительным сложностям математического характера [4-8].

Сформулирована и исследована вариационная постановка обратных задач, связанных с взаимодействием волновых процессов со слоисто-неоднородными структурами. В качестве соответствующих моделей исследованы модели распространения волновых полей волн в сложнопостроенных структурно-неоднородных средах, в достаточно полной мере отражающих основные особенности взаимодействия волновых процессов с конструкциями сложных технических систем различного назначения.

Конструктивный анализ условий достижения функциями Гамильтона своих экстремальных значений позволил построить аналитические соотношения, которым удовлетворяют материалы допустимого набора, входящие в оптимальную конструкцию, а также ранжировать материалы допустимого набора по степени перспективности для применения при оптимальном проектировании слоисто-неоднородных конструкций с требуемым комплексом свойств в качестве высокоеффективных материалов.

Проведена модификация и усложнение математических моделей, описывающих взаимодействие упругих, сейсмических волн со структурно-неоднородными основаниями, структурно-неоднородными фундаментами сложных технических систем, функционирующих в нефтяной и газовой промышленности. Результаты, полученные на основе исследования сформулированной вариационной постановки рассматриваемых обратных задач сейсмологии, позволили уточнить и обобщить соответствующие результаты, полученные другими авторами на основе физического моделирования с помощью методов динамической фотоупругости, электрических аналогий и т.п. [7, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев Е.Л. Некоторые вопросы решения задач экранирования сейсмических волн слоисто-неоднородными структурами // Вопросы инженерной сейсмологии (Межд. журнал Института Физики Земли РАН им. О.Ю. Шмидта), 2010, т. 37, № 2, с. 48-73.
2. Гусев Е.Л. Качественные закономерности взаимосвязи параметров в оптимальных структурах в задачах оптимального синтеза неоднородных структур из дискретного набора материалов при волновых воздействиях // Доклады РАН. 1996. Т.346. № 3. С. 324-326.
3. Гусев Е.Л. Качественные закономерности структуры оптимальных решений в задачах оптимального синтеза многослойных конструкций при воздействии упругих волн // Доклады РАН. 1998. Т. 368. № 1. С.53-56.
4. Столяров В.Г. Сейсмические воздействия, сейсмические фундаменты и безопасность зданий // Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения. Материалы международных академических чтений, Курск, 2006, с. 156-161.

5. Баженов В.Г., Зефиров С.В., Лаптев П.В. Численное моделирование взаимодействия сооружений с двухслойным грунтовым основанием при сейсмических воздействиях // Проблемы прочности пластичности, Н. Новгород, НГУ, 2005, в. 67, с. 162-167.
6. Абовский Н.П., Енджеевский Л.В., Наделяев В.Д. Новые конструктивные решения для сейсмостойкого строительства в особых грунтовых условиях // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, 2004, № 3, с.30-32.
7. Волновые процессы в конструкциях зданий. М.: Наука, 1987. 160 с.
8. Мелик-Елчян А.Г. Повышение сейсмостойкости зданий и сооружений. Ереван, Айастан, 1989. -317 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРОЗОВЫХ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОПРОВОДНЫХ ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧ В УСЛОВИЯХ КРИОЛИТОЗОНЫ

MATHEMATICAL MODELING OF STORM OVERVOLTAGE IN MULTICONDUCTOR TRANSMISSION LINES UNDER CRYOLITHOZONE

Григорьев Ю. М.¹, Борисова М. Н.², Собакина В. У.³

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

¹grigyum@yandex.ru, ²omarfa@mail.ru, ³sobakina-1994@mail.ru

В отсутствии прямого попадания молнии на магистральных линиях передач возникают токи и напряжения. Такие токи и напряжения называются индуцированными (наведенными). Индуцированные напряжения состоят из двух компонент - электромагнитной и электростатической. Для расчета электромагнитной компоненты известны методики, состоящие в решении системы уравнений Максвелла для нахождения электромагнитного поля канала молнии и использовании далее системы телеграфных уравнений. Реализация этой методики в регионах с многолетней мерзлотой еще не проведена.

В данной работе представлена математическая модель электростатической компоненты индуцированных грозовых напряжений, называемой волной тока и напряжения (ВТН), в многопроводной линии передачи(МЛП). В этой модели наличие многолетней мерзлоты учитывается с помощью специальных начальных условий. Математическая модель сводится к решению начально-краевых задач для обобщенной системы телеграфных уравнений. Разработана и реализована в пакете COMSOL Multiphysics программа расчета ВТН для 1 и 3 проводных линий передач конечной длины. Проведено обсуждение полученных результатов.

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФУЗИОННОГО И ДВУХПОТОКОВОГО ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

CONSTRUCTION OF DIFFUSION AND TWO-FLUX APPROXIMATION FOR THE TRANSPORT EQUATION

Даниленко Е. А.

Дальневосточный Федеральный университет, Владивосток, Россия;
sfinks17@mail.ru

В работе рассматривается математическая модель, описывающая стационарный процесс распространения неполяризованного монохроматического излучения в бесконечной по направлениям x и y двухслойной среде $G = (z_0, z_2)$, имеющей плоскопараллельное строение. Процесс распространения излучения может быть описан уравнением переноса, которое в случае изотропии рассеяния и отсутствии внутренних источников имеет вид:

$$\nu f'_z(z, \nu) + \mu(z)f(z, \nu) = \frac{\mu_s(z)}{2} \int_{-1}^1 f(z, \nu') d\nu',$$

где функция $f(z, \nu)$ – плотность потока излучения, функции $\mu(z)$, $\mu_s(z)$ – коэффициенты ослабления и рассеяния. Тогда Френелевские условия на границе раздела $z = z_1$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} f(z_1 + 0, \nu) &= R(\nu)f(z_1 + 0, -\nu) + T(\nu)f(z_1 - 0, \psi(\nu)), & \nu > 0, \\ f(z_1 - 0, \nu) &= R(\nu)f(z_1 - 0, -\nu) + T(\nu)f(z_1 + 0, \psi(\nu)), & \nu < 0. \end{aligned}$$

На внешних границах краевые условия примут вид:

$$\begin{aligned} f(z_0 + 0, \nu) &= h(\nu), & \nu \in (0, 1], \\ f(z_2 - 0, \nu) &= h(\nu), & \nu \in [-1, 0). \end{aligned}$$

Коэффициенты $R(\nu)$, $T(\nu)$ характеризуют отражательную и пропускную способность поверхности раздела сред. Функция h описывает входящий в среду поток излучения.

При построении P_1 приближения для двухслойной среды, решение будем искать в следующем виде:

$$f(z) = f_0(z) - \frac{\nu}{\mu} f'_0(z),$$

Построив условия сопряжения для функции $f_0(z)$ на границе раздела $z = z_1$, можно получить следующие условия:

$$f_0(z_1 + 0) - \frac{1}{2\mu_2} f'_0(z_1 + 0) =$$

$$\begin{aligned} &= f_0(z_1 + 0)R^+ + \frac{f'_0(z_1 + 0)}{\mu_2}\tilde{R}^+ + f_0(z_1 - 0)T^+ - \frac{f'_0(z_1 - 0)}{\mu_1}\tilde{T}^+, \\ &\quad f_0(z_1 - 0) + \frac{1}{2\mu_1}f'_0(z_1 - 0) = \\ &f_0(z_1 - 0)R^- + \frac{f'_0(z_1 - 0)}{\mu_1}\tilde{R}^- + f_0(z_1 + 0)T^- - \frac{f'_0(z_1 + 0)}{\mu_2}\tilde{T}^-, \end{aligned}$$

При построении двухпотокового приближения для двухслойной среды будем искать решение уравнения переноса в следующем виде:

$$f(z, \nu) = \begin{cases} f_0^+(z), & \text{если } \nu > 0, \\ f_0^-(z), & \text{если } \nu < 0. \end{cases}$$

Тогда функции $u(z) = f_0^+(z) + f_0^-(z)$ будет удовлетворять условиям сопряжения

$$(u(z_1 + 0) - u(z_1 - 0))T^+ = \frac{1}{2\mu_2}u'(z_1 + 0)(1 + R^+) - \frac{1}{2\mu_1}u'(z_1 - 0)T^+,$$

$$(u(z_1 + 0) - u(z_1 - 0))T^- = \frac{1}{2\mu_2}u'(z_1 + 0)(1 + R^-) - \frac{1}{2\mu_1}u'(z_1 - 0)T^-.$$

Таким образом, в случае слабонеоднородной среды условия сопряжения на границе раздела для P_1 -приближения совпадают с соответствующими условиями для удвоенного P_0 -приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.:Мир., 1981
2. Борн М., Вольф Е. Основы оптики. М.:Мир, 1972
3. Прохоров И. В., Яровенко И. П. Краевая задача теории переноса в многослойной среде с обобщенными условиями сопряжения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6, № 1(13). С. 93–107.

**ФОРМА ЛИНИИ ЯДЕРНОГО МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА
ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ
ПЛАСТИНЫ**

**THE LINESHAPE OF NUCLEAR MAGNETIC RESONANCE
NEAR THE SURFACE OF THE SUPERCONDUCTING PLATE**

Егорова А. А., Матаркин С. В., Шарин Е. П.¹

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени

М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

¹ep.sharin@s-vfu.ru

Метод ядерного магнитного резонанса (ЯМР) в настоящее время широко используется для исследования свойств сверхпроводников второго рода, в том числе высокотемпературных. ЯМР эксперименты сыграли большую роль в понимании динамики вихрей в высокотемпературных сверхпроводниках. Для надежной интерпретации формы линии наряду с однородной шириной, определяемой неоднородной динамикой взаимодействия спиновой системы ядер с электронами проводимости и между собой, необходимо учитывать неоднородность локального магнитного поля в сверхпроводнике, т.е. неоднородную ширину линии ЯМР. При исследовании вихревой решетки методом ЯМР обычно используют распределение магнитного поля, которое образуется в толще массивного сверхпроводника, полагая, что неоднородность локального поля одинакова как в глубине сверхпроводника, так и на его поверхности. Однако известно[1-3], что локальное магнитное поле по мере приближения к поверхности сверхпроводника значительно изменяется. Однако, пространственное распределение магнитного поля в сверхпроводнике вблизи его поверхности существенно отличается от распределения локального поля в глубине сверхпроводника . В данной работе эта задача решена на основе обобщенных уравнений Лондонов с использованием надлежащих граничных условий. Найдена зависимость, распределения магнитного поля в элементарной ячейке вихревой решетки от расстояния до поверхности поверхности сверхпроводящей пластины, когда внешнее магнитное поле направлено перпендикулярно оси симметрии кристалла. Численные расчеты показали, что для промежуточных значений магнитного поля $H_{c1} < H < H_{c2}$ распределение полей вихревой решетки существенно меняется вблизи поверхности и переходит в однородное поле над поверхностью расстояниях порядка усредненной глубины проникновения магнитного поля. Получены карты распределения магнитного поля, форма линии ядерного магнитного резонанса в зависимости от расстояния до поверхности анизотропного сверхпроводника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочелаев Б.И., Шарин Е.П. Распределение локального магнитного поля вихревой решетки вблизи поверхности анизотропного сверхпроводника // Сверхпроводимость: физика, химия, техника. 1992, т. 5, № 11, С. 1982–1992.
2. Kogan V.G., Simonov A.Yu., Ledvij M. Magnetic field of vortices crossing a superconductor surface //Phys.Rev. 1993 В v. 48, P. 392–397
3. M. Pozek, H.U. Habermann, A. Maier, M. Mehring Local field distribution of the vortex lattice near the surface of type-II superconductors. Magnetic resonance lineshapes //Physica C, 1996 v. 269, P.61–70

О ГЛАВНОМ И СТРОГО ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ¹

ON THE PRINCIPAL AND STRICTLY PARTICULAR SOLUTION
OF INFINITE SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

Павлов Н. Н.¹, Федоров Ф. М.², Иванова О. Ф.³

^{1,3}ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

²Научно-исследовательский институт математики СВФУ, Якутск,
Россия;

¹pnn10@mail.ru, ²foma_46@mail.ru, ³o_buskarova@mail.ru

В работах [1] и [2] введены понятия главного и строго частного решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Решение найденное методом последовательных приближений

$$x_j^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} x_k^n + b_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

при нулевых начальных значениях называется *главным решением бесконечной системы* [1].

Любую матрицу $A = (a_{i,j})_0^\infty$ бесконечного ранга, у которой последовательность главных миноров отлична от нуля, можно представить в виде произведения треугольной матрицы B на гауссову матрицу C :

$$A = BC = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & \cdots \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект №3047)

Следовательно, решение бесконечной системы сводится к последовательному решению бесконечной системы с нижней треугольной матрицей и гауссовой бесконечной системы.

Рассмотрим неоднородную гауссову бесконечную систему

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_{j,j+p} x_{j+p} = b_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots. \quad (1)$$

Для решения бесконечной системы (1) в работе [2] методом редукции в узком смысле изучены конечные системы и получены их решения в виде:

$$x_j^n = B_{n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

$$B_{n-j} = \frac{b_j}{c_{j,j}} - \sum_{p=0}^{n-j-1} \frac{c_{j,n-p}}{c_{j,j}} B_p, \quad B_0 = \frac{b_n}{c_{n,n}}, \quad j = \overline{0, n-1}.$$

Пусть существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n-j} = B(j)$ и выполняется соотношение

$$B(j) = \frac{b_j}{c_{j,j}} - \sum_{p=j+1}^{\infty} \frac{c_{j,p}}{c_{j,j}} B(p),$$

то решение $B(j)$ называется строго частным решением гауссовой системы (1).

Приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающие следующее предложение [2].

Предложение. *Строгое частное решение гауссовой системы является глашным решением данной системы.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. –М.: ГИТТЛ, 1952.
2. Федоров Ф. М., Павлов Н. Н., Иванова О. Ф. Алгоритмы реализации решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 1. С. 215–223.

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОМЕРЗАНИЯ ВЛАЖНОГО ГРУНТА¹

NUMERICAL REALIZATION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF FREEZING WET GROUND

Попов В. В.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
imi.pm.pvv@mail.ru

Разработаны разностные схемы для численной реализации математической модели промерзания пористой среды насыщенной водным раствором соли, разработанной Ентовым В.М., Максимовым А.М., Цыпкиным Г.Г. [1-3] В докладе приводится сравнение результатов расчетов полученных на основе разработанных разностных схем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В.М., Максимов А.М., Цыпкин Г.Г. Об образовании двухфазной зоны при кристаллизации смеси в пористой среде // Докл. АН СССР. 1986. Т.288, №3. С.621-624.
2. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г. Математическая модель замерзания-таяния засоленного мерзлого грунта // Прикладная механика и техническая физика, 1995, Т.36, №5. С. 57-66.
3. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. –М.: Наука. 1996. 221с.
4. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 562с.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (12-01-98514).

**СРАВНЕНИЕ ВРЕМЕНИ РАЗРАБОТКИ
ГАЗ-ГАЗОГИДРАТНОГО ПЛАСТА, ОПРЕДЕЛЁННОГО ИЗ
ИНТЕГРАЛЬНОГО МАТЕРИАЛЬНОГО БАЛАНСА И
ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА**

**COMPARISON TIME OF MINING GAS-GASHYDRATE
STRATUM FROM MATERIAL BALANCE AND NUMERICAL
METHOD AT DEPRESSURIZATION IN CONSERVATION OF
TWO-PHASE EQUILIBRIUM**

Иванов Б. Д.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
IBD1940@yandex.ru

В связи с огромными оценками ресурсов природного газа в газогидратном состоянии порядка 10^{16} м³ возникают вопросы их практического использования. Способы воздействия на газ-газогидратный пласт можно разделить на тепловые (разложение газогидратов при нагревании), депрессионные (понижение давления пласта ниже давления диссоциации газогидратов при данной температуре среды, что также вызывает разложение газогидратов) и физико-химические (вещества, изменяющие химический потенциал молекул воды в растворе, что вызывает сдвиг фазового равновесия, который может привести к разложению газогидратов). Все эти методы разработки газогидратных залежей основаны на разрушении газогидратов с последующим извлечением из них газа. Однако при разложении 1 кг чистого гидрата метана выделяется 0,872 кг жидкой воды, что может затруднить процесс разработки газогидратных залежей. Поэтому представляет интерес безводная разработка газогидратной залежи, при которой не происходит выделения жидкой воды. Это происходит в процессе десорбции газа из газогидрата в условиях сохранения фазового равновесия, при котором кристалл газогидрата не разрушается при извлечении из него газа. Кроме того, так как теплоотражающая способность метана в 21 раз выше углекислого газа, то и "парниковый эффект" будет гораздо ярче выражен. Поэтому десорбционный метод извлечения газа так же ценен с экологической точки зрения. Математическая модель безводного метода разработки газ-газогидратного пласта рассмотрена в работе [1]. В ней время разработки газ-газогидратного пласта для плоско-радиального случая определялось конечно-разностным методом при понижении давления пласта в условиях сохранности двухфазного равновесия метан-газовый гидрат метана с учетом десорбции метана из газового гидрата. В работе [2] при тех же условиях разработки газ-газогидратного пласта время разработки определялось методом интегрального материального баланса. Добыча метана проводилась при постоянном

дебите, величина которого, приведенного к атмосферному давлению, равнялось $q = 0,6 \text{ м}^3/\text{с}$. На рис. 1 доклада показаны изменения термодинамического состояния газ-газогидратного пласта в процессе разработки в условиях сохранности двухфазного равновесия метан-газогидрат метана (дивариантное равновесие—AB) и приведена кривая трехфазного равновесия газ метан–жидкая вода–газогидрат метана (моновариантное равновесие—CD). Рассматривается круговой плоскопараллельный пласт радиусом $R = 500 \text{ м}$ и толщиной $h = 10 \text{ м}$. Гидратонасыщенность пласта равна $\beta(0,2; 0,4; 0,6)$, газонасыщенность – $(1-\beta)$, т. к. сохраняется 2-х фазное равновесие газ-газогидрат. P_A и T_A равны $10,7 \text{ МПа}$ и 278 К , соответственно (первоначальное состояние—A); пористость $m = 0,3$; $\alpha = 30,738 \text{ кг}/\text{м}^3\text{--const}$; $\rho_{A,B}^g$ – плотность газа при давлении и пластовой температуре P_A , T_A и P_B , T_B , соответственно; ρ_{atm} – плотность газа при атмосферном давлении и пластовой температуре T_B в конце разработки; V_{st} – объем пласта, M_{prod} – общая масса добываемого газа. Она слагается из 2-х частей: газа, добываемого из свободной газовой фазы и газа, полученного за счет десорбции метана из газогидрата в условиях сохранности фазового равновесия газ-газогидрат. Это делается для того, чтобы газогидрат не разлагался. В результате диссоциации газогидрата выделяется много воды, что очень осложняет дальнейшую разработку газ-газогидратного пласта. Общую массу добываемого газа определяем как разницу между содержанием газа в пласте (сумма газа в свободном состоянии M_A^{free} и газа в сорбиированном состоянии в газовом гидрате M_{gA}^h) в термодинамическом состоянии A (P_A, T_A) – его начальное состояние и в состоянии (P_B, T_B) – конечное термодинамическое состояние пласта: $M_{prod} = M_A - M_B$. Масса свободного газа в состоянии или B равна $M_{A,B}^{prod} = \rho_{A,B}^g m (1 - \beta) V_{st}$ в пласте. Плотность свободного газа – $\rho_{A,B}^g = \gamma \frac{P_{A,B}}{T_{A,B}}$, γ – постоянная. Газ – метан считаем идеальным. $M_{gA,gB}^h = m \beta V_{st} \rho_{gA,gB}^h$. $\rho_{gA,gB}^h = \alpha \theta_{A,B}$. Время разработки при постоянном дебите равно отношению объема добываемого газа, приведенному к атмосферному давлению, к дебиту газа. Здесь масса газа в газогидрате равна плотности газа в гидрате [1], умноженной на объем гидрата в пласте, $\theta_{A,B} = \theta_{1A,B} + 3\theta_{2A,B}$ – суммарное число заполнения полостей решетки газового гидрата в состоянии A и B; $\theta_{jA,B} = \frac{C_j^{A,B} P_{A,B}}{1 + C_j^{A,B} P_{A,B}}$ ($j = 1, 2$) – число заполнения полости типа j: малой ($=1$) или большой ($=2$); $C_j^{A,B} = \exp(a_j - b_j T_{A,B})$ – константа Ленгмиора в термодинамическом состоянии пласта A и B, где a_j и b_j – постоянные, соответствующие малой или большой полости решетки газового гидрата.

Результаты сравнений времени разработок газ-газогидратного пласта даны в таблице.

Гидратонасыщенность	t , сутки; интегральный балансовый метод [2]	t , сутки; разностный метод [1]	Погрешность, %
$b=0,2$	2263	2364	4,27
$b=0,4$	1813	1922	5,68
$b=0,6$	1363	1473	7,49

Время разработки, определенное методом интегрального материального баланса и разностным методом. Получены параметры разработки газогидратного пласта [2, 3, 4] для гидратонасыщенности $b = 0,2; 0,4; 0,6$. Относительное количество десорбированного газа из кристаллов газогидратов мало, порядка 6 %. Из таблицы видно, что погрешности в отличии времени разработки газ-газогидратного пласта между балансовым и численным методами невелики: от 4,3% при $\beta = 0,2$ до 7,5% при $\beta = 0,6$, что говорит о хорошей аппроксимации разностного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ларионов, В.Р. Перспективы практического использования газовых гидратов в горном деле / В.Р. Ларионов, С.М. Федосеев, Б.Д. Иванов. – Якутск, 1993. – 226 с.
2. Иванов, Б. Д. Определение времени разработки газ-газогидратного пласта из материального баланса при понижении давления в условиях сохранности двухфазного равновесия / Б. Д. Иванов, Ю. М. Григорьев // Всероссийская научно-практическая конференция «Теоретические и практические аспекты исследований природных и искусственных газовых гидратов»: Сб. материалов, посвященной 75-летию заслуженного деятеля науки РФ, проф. Э. А. Бондарева. Якутск, 2011. С. 49-53.
3. Иванов Б. Д. Математическое моделирование безводной добычи газа из газ-газогидратного пласта// Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. серия. Математическое моделирование. 2008.3(62). С. 298–305.
4. Иванов Б. Д. Разработка газ-газогидратного пласта десорбционным методом при сохранении двухфазного и трехфазного равновесий// Вестник Сиб. гос. аэрокосм. ун-та. Красноярск, 2009. 2(23). С. 115-118.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ТЕПЛОПЕРЕНОСА В МНОГОЛЕТНЕМЕРЗЛЫХ ГРУНТАХ**
**NUMERICAL MODELLING OF HEAT TRANSFER PROBLEM
IN PERMAFROST**

Иванова С. С.¹, Васильева М. В.²

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;*
¹jami1212@yandex.ru, ²vasilyevadotmdotv@gmail.com

В работе проводится численное моделирование процессов теплопереноса в многолетнемерзлых грунтах. Математическая модель процесса строится на основе классической модели Стефана, описывающей теплоперенос с фазовым переходом в пористой среде. Для численного решения полученной задачи используется метод конечных элементов для аппроксимации по пространству и стандартная чисто неявная разностная схема по времени. Вычислительная реализация базируется на вычислительном пакете FEniCS. Приводятся результаты численных расчетов трехмерной задачи на высокопроизводительном вычислительном кластере *Ариан Кузьмин*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. – М.: Наука, 1996.
2. Вабищевич П.Н., Самарский А.А. Вычислительная теплопередача. Едиториал УРСС, 2003.
3. Anders Logg, Kent-Andre Mardal, Garth N. Wells Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method, 732 pp. fenicsproject.org (2011)

**О МОДЕЛИРОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ В
ПРОСТРАНСТВЕ**

ON SIMULATION OF RANDOM WALKS IN SPACE

Карабанская Е. В.

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия;
EKarachanskaya@mail.khstu.ru

Ориентированной стохастической цепью называется случайная цепь, звенья которой ориентируются коррелированно друг относительно друга. Точку начала построения последовательности звеньев назовем ведущим элементом.

Моделируется динамика изменения размеров цепи, как расстояния от начала до конца цепи (динамическая модель изменения размеров полимерного клубка-глобулы). Если первоначально цепь представляла прямую линию, а множество допустимых углов поворота звена фиксировано, то предложенная модель может быть применима и для моделирования реализации случайного блуждания с ограниченной скоростью за n шагов по ребрам пространственной решетки.

Длины звеньев могут быть различными, растяжимыми и изменяться со временем. Эти модели могут быть применены для описания каскада турбулентных вихрей, изменения конфигурации полимерных цепей, иерархически организованных систем и расчета их характеристик. В полимерных цепях при наличии в одном из узлов молекулы более высокой массы, чем в других узлах, более массивную молекулу можно рассматривать как ведущий элемент.

Пусть n – число элементов цепи. Динамику цепи (модель случайного блуждания) можно характеризовать векторами $\vec{L}_j(t)$, каждый из которых связан с началом координат и окончанием j -го сегмента, $j = \overline{1, n}$. $|\vec{L}_n(t)| = L_n(t)$ называют размером цепи.

Лемма. Пусть t_k , $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ – последовательные дискретные моменты времени. Динамика конфигурации и размеров случайной цепи в \mathbb{R}^3 в моменты времени $t = t_k$ описывается уравнениями

$$\begin{aligned} L_{j,x}(t_k) &= \sum_{i=1}^j |\vec{r}_i(k)| \cos \left(\sum_{s=1}^i \varphi_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^i \Delta \varphi_s(m) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \sin \left(\sum_{s=1}^i \theta_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^i \Delta \theta_s(m) \right), \\ L_{j,y}(t_k) &= \sum_{i=1}^j |\vec{r}_i(k)| \sin \left(\sum_{s=1}^i \varphi_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^i \Delta \varphi_s(m) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \sin \left(\sum_{s=1}^i \theta_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^i \Delta \theta_s(m) \right), \\ L_{j,z}(t_k) &= \sum_{i=1}^j |\vec{r}_i(k)| \cos \left(\sum_{s=1}^i \theta_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^i \Delta \theta_s(m) \right), \\ L_j(t_k) &= |\vec{L}_j(t_k)| = \sqrt{L_{j,x}^2(t_k) + L_{j,y}^2(t_k) + L_{j,z}^2(t_k)}, \quad k_0 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где вектор $\vec{r}_j(k)$ описывает положение j -го звена в момент времени t_k ; $\varphi_s(0)$ и $\theta_s(0)$ определяют начальное положение s -го звена цепи относительно направления $(s-1)$ -го; $\Delta \varphi_s(m)$ и $\Delta \theta_s(m)$ – независимые для любых s и m случайные приращения в момент $t = t_m$.

Специфический подход к определению углов между звеньями, примененный в моделях вида (1) позволяет проводить моделирование динамики случайных цепей в \mathbb{R}^s , $s = 2, 3$, звенья которых, в общем случае, могут иметь

различную длину и определять моментные характеристики положения крайней в данный момент в времени точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубко В. А., Чалых Е. В. Динамика цепи конечных размеров с бесконечным числом звеньев в \mathbb{R}^2 (Препринт / Ин-т прикл. матем. ДВО РАН). Владивосток ; Хабаровск : Дальнаука, 1998.
2. Karachanskaya-(Chalykh) E. Dynamics of random chains of finite size with an infinite number of elements in \mathbb{R}^2 // Theory of Stochastic Processes. 2010. № 16(32). С. 58–68.
3. Дубко В. А., Карабанская Е. В., Карабанский А. В. Ориентированные стохастические цепи. Модели и применение // Математические заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, № 1. С. 170–182.
4. Карабанская Е. В. Моментные характеристики и динамика положения диффундирующей на сфере точки под действием пуассоновских скачков // Вестник Тихоокеанского госуниверситета. 2012. № 1(24). С. 69–72.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА МЕТОДОМ ВВЕДЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛОТЫ

NUMERICAL SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF STEPHEN BY INTRODUCING A DISTRIBUTED SOURCE OF HEAT

Крылова Е.А.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
krekan2012@mail.ru

Задачи по восстановлению неизвестных источников тепла по дополнительным измерениям температуры в отдельных точках являются одним из основных в теории обратных задач математической физики [1-3] Во многих случаях неизвестной является зависимость правой части от времени. Для приближенного решения задач восстановления неизвестной правой части используются различные подходы, которые базируются на методах регуляризации [4].

В ряде исследований [5-6] численные алгоритмы приближенного решения обратной задачи основаны на преобразовании исходной задачи к краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности, в которых за счет специальной организации вычислений решение обратной задачи сводится к решению двух прямых задач. Данная методика использована в работе [7] для численного решения простейшей одномерной по пространству однофазной

обратной задачи по восстановлению переменной интенсивности источников тепла при известном их распределении по пространству.

В работе рассматривается задача по восстановлению зависимости правой части параболического уравнения от времени при известном распределении по пространству. Такая линейная обратная задача относится к классу некорректных в классическом смысле задач математической физики при специальных предположениях о точках дополнительных измерений - при условии действия источника в точках наблюдения [5]. Основываясь на методике [7], построен вычислительный алгоритм приближенного решения одномерной по пространству двухфазной обратной задачи Стефана при новом способе учета теплоты фазового перехода — путем введения распределенного в окрестности межфазовой границы источника тепла [8-9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988.
2. Дж. Бек, Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клер. Некорректные обратные задачи теплопроводности. – М.: Мир, 1989.
3. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Computational Heat transfer. – Chichester: Wiley, 1995.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.:Наука, 1986.
5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики: Учебное пособие. Изд. 3-е. - М.:Издательство ЛКИ, 2009.-480 с.
6. Науушев А.М. Уравнения математической биологии. - М.:Высшая школа, 1995.
7. Борухов В.Т., Вабищевич П.Н. Численное решение обратной задачи восстановления источника в параболическом уравнении.- Журн. Математическое моделирование. т. 10, 11, 1998. - С. 93-100.
8. Павлов А.Р., Слепцова Е.А. Численное решение задачи Стефана введением распределенного источника// Материалы VI научно-технической конференции "Современные проблемы теплофизики в условиях крайнего севера посвященной памяти профессора, д.т.н. Н.С. Иванова, Якутск, 2004, С.74-79.
9. Слепцова Е.А. Математическое моделирование развития напряженно-деформированного состояния тонких пластин при их стыковой сварке. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Я., 2009. – 109 С.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В РАЗРАБОТКЕ
МЕСТОРОЖДЕНИЙ НЕФТИ**
**NUMERICAL METHODS ON DEVELOPMENT OF OIL
RESERVOIRS**

Михайлов С. Я.¹, Тимофеева Т. С.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

¹msergey@mail.ru

Задача однофазной фильтрации в пористой среде актуальна при разработке и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений. Данная работа, позволяет измерить производительность пласта, что немаловажно для доразведке скважин, облегчает изучение залежей нефти, в частности исследование изменения распределения давления внутри пласта. Рассмотрен численный метод решения уравнения пьезопроводности, описывающей процесс однофазной фильтрации нефти, с помощью метода конечных элементов с использованием с использованием вычислительной библиотеки FenicS.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Азиз, Э. Сеттари Математическое моделирование пластовых систем. Москва- Ижевск.: Институт компьютерных исследований 2004, - 407с.
2. Баренблatt Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.:Недра, 1984. - 211 с.
3. В. И. Васильев, Т. С. Тимофеева, В. В. Попов Вычислительные методы в разработке месторождений нефти и газа. Новосибирск.:изд-во СО РАН, 2000. - 126 с.

**ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООБМЕНА ПЛАСТА-КОЛЛЕКТОРА С
ВМЕЩАЮЩИМИ ПОРОДАМИ НА НЕИЗОТЕРМИЧЕСКУЮ
ФИЛЬТРАЦИЮ РЕАЛЬНОГО ГАЗА ПРИ НАГНЕТАНИИ**
**THE INFLUENCE OF HEAT EXCHANGE OF RESERVOIR BEDS
WITH ENCLOSING ROCKS AT NON-ISOTHERMAL
FILTRATION OF A REAL GAS DURING INJECTION**

Николаев В. Е.¹, Иванов Г. И.²

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;*
¹*venik60@mail.ru*, ²*ivganya@mail.ru*

В вычислительном эксперименте исследовано влияние теплообмена через кровлю и подошву газоносного пласта на динамику полей температуры и давления при нагнетании реального газа через одиночную скважину. Эксперимент выполнен в рамках модифицированной математической модели неизотермической фильтрации газа, которая выводится из законов сохранения массы и энергии, а также из закона Дарси. В качестве замыкающих соотношений использованы физическое и калорическое уравнения состояния, а также закон Ньютона–Рихмана, описывающий теплообмен газоносного пласта с окружающими вмещающими породами. Показано, что влияние теплообмена с окружающей средой на температурное поле газоносного пласта локализовано в узкой зоне вблизи кровли и подошвы, и носит неравномерный характер.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ
ПОРОУПРУГОСТИ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ КЛАСТЕРЕ**
**NUMERICAL MODELLING OF POROELASTICITY PROBLEM
ON COMPUTATIONAL CLUSTER**

Николаева М. А.¹, Васильева М. В.²

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;*
¹*imi.pm09@mail.ru*, ²*vasilyevadotmdotv@gmail.com*

В работе рассматривается численное решение задачи пороупругости в двухмерной и трехмерной постановках. Математическая модель описывается связанный системой уравнений для давления и перемещений. Для численного решения задачи проводится конечно-элементная аппроксимация по пространству, а для аппроксимации по времени используется двухслойная

разностная схема. Вычислительная реализация полученной связанный дискретной задачи для давления и перемещений проводится с использованием вычислительного пакета FEniCS. Для построения геометрической области и расчетной сетки используется программа Gmsh. Представлены результаты численного расчета модельной трехмерной задачи на вычислительном кластере *Ариан Кузьмин*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M. A. General theory of three-dimensional consolidation. Journal of applied physics 12 (2) (1941) 155-164.
2. Minkoff S. E., Stone C. M., Bryant S., Peszynska M., Wheeler M. F. Coupled fluid flow and geomechanical deformation modelling. Journal of Petroleum Science and Engineering 38 (1) (2003) 37-56.
3. Kim J. Sequential methods for coupled geomechanics and multiphase flow. Ph.D. thesis, Stanford University (2010)
4. Barry S., Mercer G. Flow and deformation in poroelasticity-II numerical methods. Mathematical and Computer Modelling 30, 31-38 (1999)
5. Anders Logg, Kent-Andre Mardal, Garth N. Wells Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method, 732 pp. fenicsproject.org (2011)

**ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
ПОЛЯРИЗУЮЩЕГОСЯ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ПЛАСТА ПРИ
ЕГО ВОЗБУЖДЕНИИ ВЕРТИКАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ
ДИПОЛЕМ**

**PHENOMENOLOGICAL MODEL OF UNSTABLE
ELECTROMAGNETIC FIELD OF POLARIZABLE GEOLOGICAL
STRATUM AT THE DISTURBANCE OF THE VERTICAL
MAGNETIC DIPOLE**

Ним Ю. А.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
gmpirmp@yandex.ru

В связи с совершенствованием технических средств наблюдения неустановившегося электромагнитного поля геологической среды и расширением гетерогенной и многофазной геоэлектрической сферы опоискования в современной практике всё чаще стали наблюдаться «искажения» переходных процессов, вплоть до смены знаков, не учитываемых классической теорией обеспечения технологии зондирования методом переходных процессов, широко

применяемой при алмазопоисковых работах в пределах криолитозоны [1]. Согласно достаточно обширным теоретическим и экспериментальным исследованиям эти «искажения» обусловлены частотной дисперсией горных, особенно, мёрзлых пород, проявляющейся в виде, так называемой, индукционно-вызванной поляризации (ВПИ) [1-3]. Природа этого явления многогранна, суммарный количественный анализ которого не представляется возможным [1-3]. В этой связи рассмотрим лишь феноменологическую модель неустановившегося электромагнитного поля поляризующегося геологического пласта, аппроксимированного плоскостью S – одной из базовых моделей теоретического обеспечения технологии наблюдения импульсного электромагнитного поля [2].

Феноменологический способ учёта ВПИ состоит в том, что в выражение описывающее гармоническое поле плоскостью S [4] вместо характеристики стационарной электропроводности S_0 вводим широко апробированную дисперсионную модель Коул-Коул в виде [2]:

$$S(\omega) = S_0 \frac{1 + i\omega t}{1 + (1 - \eta) i\omega t},$$

где $S(\omega) = H \gamma$ – частотно-зависимая продольная проводимость пласта; H – толщина электропроводного пласта; γ – электропроводность пласта; ω – круговая частота; t – время релаксации; i – мнимая единица.

В результате решения электродинамической задачи спектральным методом Фурье получим выражения для компонент неустановившегося поля поляризующегося пласта в виде однократных интегралов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \dot{B}_z^\eta(t) &= \frac{\mu M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty m^2 e^{-\alpha m} e^{-at} \left(chbt + \frac{\beta - a}{b} shbt \right) J_0(mr) dm = \\ &= -\frac{\mu M}{4\pi} \int_0^\infty m^2 e^{-\alpha m} e^{-at} a \left[(1 - \beta - a) chbt + \left(\frac{\beta - a}{b} + b \right) shbt \right] J_0(mr) dm, \end{aligned}$$

где $a = \frac{m(1-\eta)}{\mu S_0} + \frac{1}{2\tau}$, $b = \frac{m(1-\eta)}{\mu S_0}$, $\beta = \frac{1}{\tau}$, $\alpha = 2h + z$, t – время наблюдения, h – расстояние от возбуждающего диполя до плоскости S ; r , φ , z – цилиндрические координаты, μ – магнитная проницаемость вакуума; m – переменная разделения; M – магнитный момент возбудителя; $J_0(mr)$ – функция Бесселя нулевого порядка аргумента (mr); $0 \leq \eta \leq 1$ – поляризуемость слоя.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \dot{B}_r^\eta(t) &= \frac{\mu M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty m^2 e^{-dm} e^{-at} \cos\varphi \left(chbt + \frac{\beta - a}{b} shbt \right) J_1(mr) dm = \\ &= \frac{\mu M}{4\pi} \int_0^\infty m^2 e^{-dm} e^{-at} \cos\varphi a \left[(1 + \beta - a) chbt + \left(\frac{\beta - a}{b} + b \right) shbt \right] J_1(mr) dm, \end{aligned}$$

где $J_1(mr)$ – функция Бесселя первого порядка аргумента (mr).

Численный анализ неустановившегося поля поляризующегося пласта согласуется с известными аналитическими, численными и экспериментальными данными [1-3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Жандалинов В.М. Электрические и электромагнитные зондирования при поисках коренных месторождений алмазов. – Новосибирск: Гео, 2011, 263 с.
2. Kamenetsky F.M., Stettler E.H., Trigubovich C.M. Transient Geo-electromagnetics. Munich, 2010, 304.
3. Кожевников Н.О. Быстропротекающая индукционно-вызванная поляризация в мёрзлых породах // Геология и геофизика. - 2012 – т.53. – №4. – с. 527-540.
4. Ним Ю.А. Основы приближённой теории электроздондирования методом переходных процессов // Геология и геофизика, 1989, №3. – с. 134-141.

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ФЕЛЬБЕРГА СЕДЬМОГО ПОРЯДКА¹

MODIFICATION OF METHOD FEHLBERG SEVEN ORDER

Новиков Е. А.¹, Новиков А. Е.²

¹ Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск,
Россия; novikov@icm.krasn.ru

² Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
aenovikov@bk.ru

При моделировании кинетики химических реакций, электроэнергетических систем, химико-технологических процессов, динамики механических систем, схемотехническом проектировании радиоэлектронных схем и других важных приложениях возникает проблема решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений вида [1-2]

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (1)$$

где y и f – N -мерные вектор-функции, t – скалярная величина.

Учет большого числа факторов при построении математических моделей приводит к расширению класса задач, описываемых жесткими системами [3-5]. Основные тенденции при построении численных методов связаны с решением систем большой размерности [1-6]. Сложность практических задач приводит к возрастающим требованиям к вычислительным алгоритмам, поэтому проблема создания эффективных численных методов решения задачи

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00047)

Коши для жестких систем большой размерности является актуальной задачей.

Обычно для решения жестких задач применяются методы с неограниченной областью устойчивости. Однако при решении больших систем в таких численных формулах время декомпозиции матрицы Якоби фактически полностью определяет общие вычислительные затраты. Для повышения эффективности расчетов во многих алгоритмах применяется замораживание матрицы Якоби, то есть использование одной матрицы на нескольких шагах интегрирования. Это позволяет сократить вычислительные затраты, но полностью проблему не решает. Более того, во многих безытерационных методах (например, в методах типа Розенброка), в которых матрица Якоби включена непосредственно в численную схему, порядок точности ограничен числом два при замораживании матрицы Якоби.

Для явных методов шаг интегрирования h ограничен неравенством $h|\lambda_{max}| \leq D$ [3, 7], где λ_{max} есть максимальное собственное число матрицы Якоби системы (1), а положительная постоянная D связана с размером области устойчивости. Так как для многих жестких задач длина интервала интегрирования значительно превышает величину $D/|\lambda_{max}|$, то интегрирование при условии $h|\lambda_{max}| \leq D$ оказывается непосильным для современных ЭВМ. В последнее время в связи с построением явных методов с расширенными областями устойчивости их возможности трактуются более широко [3].

Здесь построен алгоритм переменного порядка и шага на основе стадий тринадцатистадийного метода Рунге-Кутта-Фельберга [8]. Приведены результаты расчетов, подтверждающие тридцатикратное повышение эффективности за счет переменного порядка и гибкого управления шагом с учетом неравенства для контроля устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
2. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.
3. Новиков Е.А., Шорников Ю.В. Компьютерное моделирование жестких гибридных систем. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012.
4. Демиденко Н.Д., Кулагин В.А., Шокин Ю.И. Моделирование и вычислительные технологии распределенных систем. Новосибирск: Наука, 2012.
5. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
6. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа. М.: Физматлит, 2007

7. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997.
8. Fehlberg E. Klassische Runge-Kutta-Formeln funfter und siebenter Ordnung mit Schrittweitenkontrolle // Computing. 1969. № 4. S. 93–106.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМОВ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ
ЛИНЕЙНЫХ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ ПРИ
СОВРЕМЕННОМ ИЗМЕНЕНИИ КЛИМАТА**
**MATHEMATICAL MODELING OF TEMPERATURE MODES
GROUND BASES OF LINEAR ENGINEERING
CONSTRUCTIONS AT MODERN CLIMATE CHANGE**

Пермяков П. П.¹, Попов Г. Г.², Аммосов А. П.³

*Институт физико-технических проблем Севера им. В. П. Ларионова СО
РАН, Якутск, Россия;*

¹p.p.permyakov@iptpn.ysn.ru, ²g.g.popov@mail.ru, ³ammosov37@mail.ru

Процесс строительства линейных инженерных сооружений сопровождается техногенным нарушением тепловлажностного грунтового основания, что приводит нежелательным мерзлотным процессам: термокарст, термоэропризя, термопросадки и пучения.

С учетом современного изменения климата в данной работе приводятся математическая модель тепловлажностных процессов и результаты численного эксперимента по прогнозу экзогенных процессов в основании сооружений. Тепловлагоперенос описывается системой нелинейных уравнений в двумерной области. Система уравнений расщепляется на одномерные задачи и реализуется методом направленных разностей с учетом итерации.

Для прогноза температурного режима грунтов в слое годовых теплооборотов и мощности деятельного слоя использованы данные метеостанции Якутск (средние суточные температуры воздуха, ежемесячные высоты снежного покрова) и теплобалансовых наблюдений на различных стационарах. Численный эксперимент водного режима грунтов произведен с учетом количества порового раствора карбонатных пород, осадков и испарения.

В результате численного эксперимента установлено, что процесс миграции пленочной и капиллярной влаги играет основную роль в формировании морозного пучения и термопросадки. В течение зимы величина пучения монотонно растет за счет миграции поровой влаги к фронту промерзания. В мае при поступлении снеговой воды наблюдается резкое увеличение объема (набухание) верхних слоев деятельного слоя. В летние месяцы (июнь-август), когда идет интенсивное испарение влаги за счет высыхания верхних слоев грунта происходит усадка деятельного слоя. Осенние дожди (сентябрь)

останавливают процесс осадки от высыхания. Весь вышеуказанный процесс каждый год циклически повторяется.

Общая осадка нефтепровода состоит из двух слагаемых. Первая слагаемая учитывает относительную просадочность льдистых отложений без нагрузки. Второе выражение рассчитывается при различных значениях коэффициента сжимаемости грунта. Из численного эксперимента установлено, что без изоляции трубопровода процесс осадки усиливается, т.е. наличие теплоизоляции существенно погашает распространение тепла вокруг нефтепровода. В процессе 35-летней эксплуатации нефтепровода без изоляции образуется чаша протаивания глубиной 11,7 м, что сопровождается максимальной просадкой нефтепровода на 0,45 м. При теплоизоляции в конце 35-летней эксплуатации при теплоизоляции глубина чаши протаивания равна 7,6 м, а величина максимальной осадки - 0,37 м. Для стабилизации деформационного состояния линейных сооружений следует провести противопучистые и противотермокарстовые мероприятия.

Таким образом, разработана методология компьютерного моделирования тепловлажностного режима с учетом современных изменений климата (ежемесячная динамика снежного покрова, среднесуточная температура воздуха), а также неоднородности грунтового массива. Анализ результатов исследований показывает, что учет современных изменений климата повышает достоверность долгосрочного геокриологического прогноза.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАВНОВЕСНОЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

PROBLEMS OF NUMERICAL SIMULATION OF THE SEA ICE COVER

Поликарпова О. Д.¹, Тимофеева Т. С.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

¹oktya_bir29@mail.ru

Процессы разработки нефтяных месторождений связаны с движением многофазных сред, которые характеризуются неравновесными свойствами [2].

Рассматривается модель неравновесного вытеснения, которая основана на зависимости эффективной насыщенности от скорости изменения истинной насыщенности $\sigma = s - \tau(s) \left(\frac{v}{m} \right) \cdot grads$ [1].

Численные расчеты задачи вытеснения проведены в одномерной постановке. При этом соотношение для определения эффективной насыщенности использовалась преобразованное к виду $\sigma = s - DR(s) \frac{\partial s}{\partial x}$.

Система уравнений Маскета-Леверетта совместно с предыдущим соотношением при постоянной скорости фильтрации использовалась в безразмерных переменных:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon a(\sigma) \frac{\partial s}{\partial x} - F(\sigma) \right], \\ s - DR(s) \frac{\partial s}{\partial t} = \sigma. \end{cases}$$

Для численного решения используется метод расщепления по физическим процессам.

Путем численных расчетов исследовано влияние параметра неравновесности D на процесс фильтрации. Неравновесность приводит к размазыванию скачка насыщенности и образованию переходной стабилизированной зоны, длина которой зависит от ее величины. Результаты показали, что отношение вязостей влияет на структуру неравновесного двухфазного течения. Чем меньше отношение вязостей, тем больше влияние неравновесности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочаров О. Б., Кузнецов В. В., Чехович Ю.В. Численное исследование неравновесной фильтрации несмешивающихся жидкостей // Инж.-физ. журн. 1989. Т. 57. №1. С. 91-95.
2. Баренблatt Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М., Недра, 1984, 211 с.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

NUMERICAL SIMULATION OF HEAT AND MASS TRANSFER

Пятков С. Г.¹, Сафонов Е. И.²

Югорский Государственный Университет, Ханты-Мансийск, Россия;

¹s_pyatkov@ugrasu.ru ²dc.gerz.hd@gmail.com

В работе рассматривается задача об определении решения и параболического уравнения и функций $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) таких что:

$$u_t + A(t, x, D)u = \sum_{i=1}^r b_i(t, x)q_i(t) + f, \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

$$A(t, x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(t, x)D^\alpha, \quad D = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}),$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(t, x)D^\beta u|_S = g_j(t, x), \quad (2)$$

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad x_i \in G, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (3)$$

где $\varphi_i(x)$ - некоторый набор функций, G - ограниченная область в \mathbb{R}^n с границей Γ класса C^{2m} , $Q = G \times (0, T)$ и $S = \Gamma \times (0, T)$, A - матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размерности $h \times h$ и $r = sh$.

При определенных условиях на данные задачи мы рассматриваем вопрос о разрешимости краевой задачи (1)-(3) в пространствах Соболева, в случае $m = 1$ и $h = 1$ мы строим алгоритм численного решения задачи (1)-(3) и проводим численные эксперименты.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ В ВЫХОДНЫХ СИГНАЛАХ

NUMERICAL ALGORITHM OF ESTIMATION OF PARAMETERS OF NONLINEAR STATIONARY MULTIDIMENSIONAL DYNAMIC SYSTEM IN THE PRESENCE OF HINDRANCES IN OUTPUT SIGNALS

Руднев К. К.

Самарский государственный университет путей сообщения, Самара,
Россия;
kirudnev@gmail.com

Для оценивания параметров нелинейных динамических систем с помехами в выходных сигналах разработано большое число методов, учитывающих особенности объектов, условия их функционирования, способ тестирования и математическую основу получаемых экспериментальных данных. В зависимости от априорной информации об объекте управления различают задачи идентификации в узком и широком смысле. Задача идентификации в узком смысле состоит в оценивании параметров и состояния системы по результатам наблюдений над входными и выходными переменными, полученными в условиях функционирования объекта. Рассматривается проблема параметрической идентификации многомерных по входу и выходу нелинейных разностных уравнений с помехами в выходных сигналах.

Пусть имеет место многомерная стационарная динамическая система с дискретным временем, описываемая следующим уравнением:

$$\begin{aligned} Z_{i+1} = & G_1^{(0)} Z_i + G_1^{(1)} Z_{i-1} + \dots + G_1^{(r)} Z_{i-r} + \\ & + G_2^{(0)} \eta_0(x_i) + G_2^{(1)} \eta_1(x_{i-1}) + \dots + G_2^{(r_i)} \eta_{r_i}(x_{i-r_i}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{где } \eta_0(x_i) = \begin{vmatrix} \eta_0^{(1)}(x_i^{(1)}) \\ \vdots \\ \eta_0^{(m)}(x_i^{(m)}) \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \eta_{r_1}^{(1)}(x_{i-r_1}^{(1)}) \\ \vdots \\ \eta_{r_1}^{(m)}(x_{i-r_1}^{(m)}) \end{vmatrix} = \eta_{(r_1)}(x_{i-r_1}),$$

$Y_i = Z_i + \Xi(i)$, где

Y_i, Z_i – наблюдаемые и ненаблюдаемые векторы выходных сигналов; $(Z_i, Y_i \in R^n)$, X_i – наблюдаемые векторы входных сигналов ($x_i \in R^m$); $\{\Xi(i)\}$ – случайная векторная последовательность.

Применение классического МНК не позволяет получить состоятельные оценки параметров матриц, так как такая постановка задачи не совпадает с обычной постановкой задачи в регрессионном анализе.

Для получения состоятельных оценок матриц коэффициентов при определенных ограничениях на помеху и входной сигнал может быть применен следующий критерий [1]:

$$\min_{\begin{array}{c} b_{j\bullet} \\ \dots \\ a_{j\bullet} \end{array} \in \tilde{B}} \frac{\sum_{i=1}^N \left(y_{i+1}^{(j)} - |b_{j\bullet}|a_{j\bullet} | \begin{array}{c} Y_r(i) \\ \dots \\ \eta_{r_1}(i) \end{array} | \right)^2}{\sigma_j^2 + b_{j\bullet} D(b_{j\bullet})^T} \quad (2)$$

где $y_{i+1}^{(j)}$ – значение j – выходного сигнала ($j = \overrightarrow{1, n}$),

Критерий (2) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \min_{\begin{array}{c} b_{j\bullet} \\ a_{j\bullet} \end{array} \in \tilde{B}} \omega^{-1}(b_{j\bullet}|a_{j\bullet}) \times \\ & \times \left(Y^{(j)} - |A_Y|A_{\bar{\eta}}|b_{j\bullet}|a_{j\bullet}|^T, Y^{(j)} - |A_Y|A_{\bar{\eta}}|b_{j\bullet}|a_{j\bullet}|^T \right) = \\ & = \min_{(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}) \in \tilde{B}} \omega^{-1}(b_{j\bullet}|a_{j\bullet}) U_N(b_{j\bullet}|a_{j\bullet}) \end{aligned} \quad (3)$$

Для получения численного метода вычисления оценок параметров критерия (3) рассмотрим функцию:

$$V_N(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \Theta^{(j)}) = U_N(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}) - \Theta^{(j)} \omega(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}),$$

$$V_N(\Theta^{(j)}) = \min_{\begin{array}{c} b_{j\bullet}, a_{j\bullet} \\ \in \tilde{B} \end{array}} V_N(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \Theta^{(j)}),$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Каюба О.А., Руднев К.К. Параметрическая идентификация многомерной нелинейной стационарной динамической системы при наличии помех в выходных сигналах // Вестник Транспорта Поволжья. –2012, вып.№4(34). – Самара: СамГУПС, – С.38-43.
2. Каюба О.А., Жданов А.И. Особенности применения МНК для оценивания линейных разностных операторов в задачах идентификации объектов управления // Автоматика и телемеханика.- 1982. - №2. – с.29-38.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РАЗНОГО ПОРЯДКА С ПОМЕХАМИ В ВЫХОДНЫХ СИГНАЛАХ

NUMERICAL METHOD OF ESTIMATION OF PARAMETERS OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEM OF THE DIFFERENT RANK WITH HINDRANCES IN OUTPUT SIGNALS

Семашкин В. Г.

Самарский государственный университет путей сообщения, Самара,
Россия;
semashkin.vg@gmail.com

Для решения задач параметрической идентификации параметров нелинейных динамических систем с помехами в выходных сигналах разработано большое число методов, учитывающих особенности объектов, условия их функционирования, способ тестирования и математическую основу получаемых экспериментальных данных. Также существуют динамические системы, в которых помехи присутствуют и на входных сигналах. Оценка параметров таких динамических систем более трудная проблема. Предложен численный метод оценивания параметров нелинейных многомерных динамических систем, описываемых разностными уравнениями при наличии помех наблюдения в выходных сигналах.

Рассмотрим многомерную динамическую систему с дискретным временем, которая описывается следующим уравнением

$$\begin{aligned} z_i^{(n)} &= \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^{\bar{r}_{nl}} b_0^{(ml)}(n) z_{i-m}^l + \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^{\bar{r}_{nj}} a_0^{(mj)}(n) \eta_i^{(j)}(x_{i-m}^{(j)}), \\ y_i^{(l)} &= z_i^{(l)} + \xi_i^{(l)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $n = \overline{1, k}$, $y^{(l)}$, $z^{(l)}$ – наблюдавшиеся и ненаблюдавшиеся выходные сигналы ($l = \overline{1, k}$); k – число выходных переменных, d – число входных переменных; $b_0^{(ml)}(n)$, $a_0^{(mj)}(n)$ – параметры разностного уравнения; $x_i^{(j)}$ – входной сигнал, $z_i^{(j)}$ – выходной сигнал ($j = \overline{1, d}$); $\xi_i^{(l)}$ – помеха в l -ом выходном сигнале.

Требуется определить оценки неизвестных коэффициентов нелинейного динамического объекта, описанного уравнением (1) по наблюдаемым последовательностям $\{y_i^{(l)}\}$, $\{x_{i-m}^{(j)}\}$.

При выполнении условий 1–4 описанных в [2] определяются оценки $\left| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right|$ неизвестных значений из условия минимума суммы взвешенных квадратичных отклонений $e(n)$ с весом $\omega(b(n))$.

Был рассмотрен следующий критерий

$$\min_{\left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) \in \tilde{B}} \frac{\sum_{i=1}^N \left[y_i^{(n)} - \left| \frac{b(n)}{a(n)} \right|^T \left(\frac{Y_{r_{nk}}(i-1)}{\eta_{r_{nd}}(i)} \right) \right]^2}{\sigma_n^2 + b(n)D(n)b^T(n)}, \quad (1)$$

который можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \min_{\left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) \in \tilde{B}} \omega^{-1}(b(n), a(n)) \times \begin{pmatrix} Y(n) - \begin{pmatrix} A_Y(n) \\ A_\eta(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix}, \\ Y(n) - (A_Y(n)|A_X(n)) \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ & \min_{\left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) \in \tilde{B}} \omega^{-1}(b(n), a(n)) U_N. \end{aligned} \quad (3)$$

Для получения численного метода вычисления оценок параметров из критерия (3) была рассмотрена следующая функция

$$\begin{aligned} V_N(b(n), a(n), \Theta(n)) &= U_N(b(n), a(n)) - \Theta(n)\omega(b(n)) \\ V_N(\Theta(n)) &= \min_{\left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) \in \tilde{B}} V_N(b(n), a(n), \Theta(n)). \end{aligned} \quad (4)$$

ЛИТЕРАТУРА

- Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. - М.: Физматлит, 2010.
- Кацюба О. А., Семашкин В. Г. Рекуррентная параметрическая идентификация многомерных нелинейных динамических систем разного порядка с помехами в выходных сигналах // Вестник Транспорта Поволжья. 2012, вып.4(34). Самара: СамГУПС, С. 43-49.
- Кацюба О. А., Жданов А. И. Особенности применения МНК для оценивания линейных разностных операторов в задачах идентификации объектов управления // Автоматика и телемеханика. 1979. №8. С. 86-90.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

RECOVERY OF THE BOUNDARY CONDITION FOR THE PARABOLIC EQUATION

Тихонов А. Г.

Якутский экономико-правовой институт, Якутск, Россия;
tagnir@mail.ru

Пусть дана область $D = (0, 1) \times (0, T)$. Запишем постановку прямой задачи для параболического уравнения. Найти функцию $u(x, t)$ удовлетворяющую уравнению

$$u_t = (k(x)u_x)_x, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T$$

и условиям

$$\begin{aligned} u(1, t) &= q(t), \quad 0 < t \leq T \\ k(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Предположим, что функция $q(t)$ неизвестна, а о решении прямой задачи имеется дополнительная информация вида

$$u(0, t) = \phi(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Требуется определить при данных условиях функцию $q(t)$, определяющую краевое условие. Для данной обратной задачи в качестве функционала качества принято выражение

$$J(q) = \int_0^T [u(0, t; q) - \phi(t)]^2 dt.$$

На основе формулировки соответствующей сопряженной задачи определено выражение градиента функционала качества. Приведены градиентные итерационные схемы для решения обратной задачи.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА В СИСТЕМЕ ПОДШИПНИКОВ НА ОБЩЕМ ВАЛУ ПРИ МАЛЫХ СКОРОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

MODELING OF THERMAL PROCESSES IN THE SYSTEM ON A COMMON SHAFT OF BEARINGS AT LOW SPEEDS

Тихонов Р. С.¹, Старостин Н. П.²

¹ Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия;
roman_tikhon@mail.ru

² ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

В работе [1] предложен метод тепловой диагностики трения, позволяющий определять момент силы трения в подшипниках скольжения по температурным данным. Метод сводится к измерению температуры в окрестности зоны трения, построению математической модели и решению соответствующей граничной обратной задачи восстановления фрикционного тепловыделения и соответственно мощности трения. В работе [2] тепловая диагностика трения с учетом влияния скорости вращения вала на температурное поле рассматривалась для одного подшипника скольжения в плоском случае. Актуальным является разработка метода тепловой диагностики трения для системы подшипников скольжения.

В данной работе рассматривается ключевая задача тепловой диагностики трения - задача определения нестационарного температурного поля в системе подшипников с учетом движения вала. Принимая допущение об однородности распределения температуры по длине подшипника и корпуса, нестационарное температурное поле в системе подшипников скольжения описывалось двумерными квазилинейными уравнениями теплопроводности для втулок с корпусами и для вала - трехмерным уравнением с конвективным членом, учитывающим его движение. В зоне трения втулка с валом записывалось условия фрикционного тепловыделения. На остальных границах задавались традиционные условия первого и третьего рода. Начальное распределение температуры считалось однородным. Задача решалась методом конечных разностей сведением к цепочке одномерных уравнений теплопроводности, которые решались с использованием безусловно устойчивых неявных схем.

На основе вычислительных экспериментов для заданной скорости вращения вала определен максимальный шаг по времени, обеспечивающий приемлемую для практических расчетов точность решения. Определение такого шага позволит сократить затраты машинного времени на решение граничной обратной задачи. Вычислительными экспериментами также исследована динамика температурного поля в системе четырех подшипников на общем валу. Имитацией различных закономерностей фрикционных тепловыделений в

системе исследовано взаимное влияние температурных полей в подшипниках путем теплопередачи через вал. Многочисленные расчеты с варьированием всех параметров математической модели и анализ температурных зависимостей показали, что динамики температурных полей не противоречат физическому представлению описываемого теплового процесса и адекватно реагируют на изменение исходных данных. Разработанный алгоритм определения температурного поля в системе подшипников скольжения может быть рекомендован к использованию в методе тепловой диагностики трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старостин Н.П., Тихонов А.Г., Моров В.А., Кондаков А.С. Расчет триботехнических параметров в опорах скольжения.- Якутск: Изд-во ЯНЦ СО РАН, 1999. 276 с.
2. Starostin N.P., Kondakov A.S. and Vasilieva M.A. Identification of friction heat generation in sliding bearing by temperature data//Inverse Problems in Science and Engineering. – 2012, pp. 1-16 (DOI:10.1080/17415677.2012.698616)

ВЕСОВЫЕ МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО НА ПРОИЗВЕДЕНИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

VARIANCE REDUCTION TECHNIQUES ON PRODUCT OF PROBABILITY SPACES

Цветков Е. А.

ГНЦ РФ ФГУП «ЦНИИХМ», Москва, Россия;
tsvetkov_egor@mail.ru

В некоторых задачах требуется вычисление среднего значения функционала $q(S_1, S_2, \dots, S_k)$, зависящего от реализаций S_1, S_2, \dots, S_k нескольких марковских цепей. Например, в задачах радиационной физики такими функционалами описываются отклики схем совпадений, когда важно учесть совместное влияние нескольких частиц на отклик детектора [1]. В экономике встречаются функционалы, зависящие от курсов нескольких валют. Также подобные функционалы возникают в задачах теоретической физики, теории массового обслуживания и др.

Для одномерного случая ($k = 1$) разработаны весовые методы Монте-Карло, наиболее известными из которых являются метод существенной выборки, метод расслоенной выборки, расщепление и «русская рулетка» [2]. Эти методы получили наибольшее развитие в задачах радиационной физики, в которых позволяют ускорить расчеты на несколько порядков [1,3].

В самом общем случае при использовании весовых методов для разыгрывания реализации марковской цепи получается несколько, вообще говоря,

зависимых реализаций этой цепи S_1, S_2, \dots, S_m с весами w_1, w_2, \dots, w_m . Число m случайно. Весовая оценка имеет вид

$$Q^* = \sum_{i=1}^m q(S_i)w_i$$

Несмешенность оценки, то есть равенство $MQ^* = Mq$, достигается выбором весов w_i .

Целью настоящей работы является перенос весовых методов из одномерного случая на многомерный.

Для простоты примем $k = 2$. Обозначим Ω_1 и Ω_2 – множества всех реализаций первого и второго марковских процессов. Пусть теперь $q : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow R$ – случайная величина, заданная на произведении вероятностных пространств.

При моделировании методом Монте-Карло каждого из марковских процессов возможно использование весовых методов. В настоящей работе предлагается несмешенная оценка

$$Q^* = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} q(S_{1i}, S_{2j})w_{1i}w_{2j},$$

где S_{ij} – j -ая реализация i -ого марковского процесса, w_{ij} – ее статистический вес, m_i – количество реализаций i -ого марковского процесса.

В случае задач больших размерностей приведенная формула допускает обобщение. Однако возникает сложность, связанная с тем, что количество слагаемых растет экспоненциально с размерностью задачи. Например, в задачах радиационной физики моделируется обычно не менее 1000 траекторий, каждая из которых расщепляется на несколько траекторий (количество слагаемых более чем 2^{1000}).

Сумму можно вычислить с использованием метода «русской рулетки». Для этого надо задаться некоторой ненулевой вероятностью p «выживания» каждого отдельно взятого слагаемого. Пусть I_{ij} – индикатор «выживания» i, j -ого слагаемого. Оценка

$$Q^* = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} q(S_{1i}, S_{2j})w_{1i}w_{2j} \frac{1}{p} I_{ij},$$

также является несмешенной оценкой Mq , но содержит в $1/p$ раз меньше ненулевых членов, чем Q^* .

ЛИТЕРАТУРА

1. Цветков Е. А. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва. 2013.
2. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс. СПб.: Невский диалект. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2009.
3. Booth T. A Monte Carlo variance reduction approach for non-Boltzmann tallies //Nuclear Science and Engineering. 1994. Vol. 116, Pp. 113–124.

Секция IV. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

INVARIANT SUBMODELS OF THE THERMAL MOTION OF A GAS¹

Chirkunov Y. A.¹, Pikmullina E. O.²

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia;
¹chr101@mail.ru, ²elenal187@list.ru

The special choice of mass Lagrangian variables allows to lead system of the equations of thermal motion of a gas with four independent variables to the equivalent nonlinear reduced system with three independent variables describing the path of the gas particles. The simplest representatives of all significantly different (not limited by point transformations) invariant submodels of rank 0 and 1 are found for the reduced system of differential equations. Some boundary value problems for the system have been studied by means of these invariant submodels and production solution formulas. Thus, a description of gas particles trajectories obtained in case of, generally speaking, not invariant thermal motion. The results obtained in this paper may be used in the analysis of the thermal motion of a gas in strongly rarefied space.

REFERENCES

1. Chirkunov Yu. A. *The Conservation Laws and Group Properties of the Equations of Gas Dynamics with Zero Velocity of Sound. Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2009. Vol. 73. No. 4. P. 421 – 425.
1. Chirkunov Yu. A., Habirov S. V. 2. 2. *Elements of symmetry analysis of differential equations of continuum mechanics. Novosibirsk, NSTU, 2012, 659 p. (In Russian).*

¹This work was supported by Ministry of education and science of the Russian Federation, the state assignment No. 2014/138, project No. 435

**ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПРИ ЭПИЗООТИИ СИБИРСКОЙ
ЯЗВЫ ЛОШАДЕЙ В ЯКУТИИ**

**MATHEMATICAL MODEL FOR PREDICTING WHEN AN
EPIZOOTIC ANTHRAX HORSES IN YAKUTIA**

Аммосов С. П.¹, Дягилев Г. Т.²

¹ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия; aspr@rambler.ru

²Якутский НИИ сельского хозяйства РАСХН, Якутск, Россия;
agronii20@rambler.ru

Развитие коневодства в Якутии как традиционно ведущей отрасли скотоводства имеет многовековую историю. Коневодству и крупному рогатому скоту огромный ущерб наносила эпизоотия заразных болезней животных, такие как сибирская язва, геморрагическая болезнь грызунов, чума собак, бешенство и др. Особенно опасным является вспышка сибирской язвы. Вольно-косячный способ тубернекции лошадей и их дальнейшее продвижение на северные территории Якутии [1] предъявляет высокий уровень ветеринарного сопровождения их содержания. В то же время в работе [2] отмечается отсутствие или значительно низкий уровень вспышки сибирской язвы в Арктической зоне Якутии. В работе [3] приведена динамика эпизоотии сибирской язвы в территории Республики Саха. Сегодня в условиях рыночных отношений имеется вероятность ослабления работ по профилактической вакцинации животных, для предупреждения вспышки этой опасной болезни. Как показывает анализ эпизоотии сибирской язвы в Якутии прошлых лет начиная с 1811 года наличие многочисленных локальных очаговых участков по всей огромной территории республики [4]. В связи с большой опасностью для населения эпизоотий сибирской язвы остаётся актуальной проблема прогнозирования скорости распространения болезни при внезапной активности очага. Эффективное прогнозирование эпизоотий возможно методом моделирования эпизоотического процесса и оценки адекватности модели статистическим данным прошлых лет. Математические модели интенсивности заражения животных различными заразными заболеваниями скота и выбытия их в результате болезни предлагались многими исследователями эпизоотологии. В настоящее время разработка математических моделей в области эпизоотии характеризуется их направленностью на оценку интенсивности заражения особей находящихся в ограниченной территории с высокой степенью плотностью поголовья. Так, авторами работы [5] предложена математическая модель, позволяющая прогнозировать численность заболевания пастереллезом птиц в промышленном птицеводстве по времени.

Особенностью эпизоотии сибирской язвы является высокая скорость распространения и чрезвычайно большой процент летальности при заражении

лошадей, отсюда, представим приведенную выше систему уравнений в следующем виде

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -a \frac{y(t) - z(t)}{x(t) + y(t) - z(t)} x(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = a \frac{x(t)}{x(t) + y(t) - z(t)} (y(t) - z(t)) - by(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} = by(t), \end{cases}$$

где $x(t)$ – число сенсибильных (восприимчивых) лошадей; $y(t)$ – число больных лошадей; $z(t)$ – число устранных животных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аммосов А. П. Продвижение табунного коневодства из центральной части в Арктические районы Якутии. Global Problems of the State, reproduction and use of Natural Resources of the Planet earth. Materials digest of the XXVIII International Research and Practice Conference ... - London, July 13-18, 2012.- published by IASHE, London, 2012.
2. Дягилев Г. Т., Неустроев М. П. Эпизоотическая характеристика Сибирской язвы с 1811 по 1993 гг. // Актуальные вопросы ветеринарной биологии. 2012. № 1(13). С. 33–36.
3. Дягилев Г. Т., Неустроев М. П. История организации профилактических и противоэпизоотических мероприятий против Сибирской язвы на территории Республики Саха (Якутия) // Актуальные вопросы ветеринарной биологии. 2012. № 3(15). С. 37–42.
4. Дягилев Г. Т., Неустроев М. П. К истории организации Сибирской язвы в Якутской области в XIX веке // Актуальные вопросы ветеринарной биологии. 2010. № 4(8). С. 3–7.
5. Богданов А. Н., Борисенкова А. Н., Коровкин Р. Н., Придьбайло Н. Д. Разработка математических моделей прогнозирования эпизоотического процесса // Ветеринария. 2003. № 10, С. 25–29.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ ПОГОЛОВЬЯ ЛОШАДЕЙ И ВОЛКОВ В РЕСПУБЛИКЕ САХА (ЯКУТИЯ)

ON A MODEL OF POPULATION DYNAMICS OF HORSES AND WOLVES IN THE REPUBLIC OF SAKHA (YAKUTIA)

Аммосов С. П.¹, Кайгородов С. П.²

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

¹aspr@rambler.ru, ²sp.kaigorodov@s-vfu.ru

Коневодство является одной из традиционных отраслей хозяйственной деятельности жителей сельской местности Республики Саха (Якутия). В течение последующих 20 лет произошла значительная концентрация поголовья лошадей в околоселковой зоне. В результате, кроме дополнительного экологического ущерба селам, этот процесс привел к заметной конкуренции косяков лошадей с крупным рогатым скотом при использовании пастбищ. В то же время, исторически обусловленное продвижение продуктивного коневодства в Арктические зоны должно происходить и ныне [1]. В настоящее время, руководство республики принимает ряд мер по использованию удаленных от населенного пункта территорий для развития коневодства.

В последнее время участились случаи нападения волков на домашних животных, в большей части на лошадей, так как они практически круглогодично находятся на свободном выпасе (тебенёвке). В период планово-административного управления народным хозяйством производилось плановое истребление волков, как хищников, наносящих значительный ущерб коневодству и оленеводству. В связи с переходом в рыночные отношения контроль над численностью волков не производится. Между тем, бесконтрольное увеличение численности хищников, особенно волков, приводит непредвиденным потерям в табунном коневодстве. Поэтому изучение динамики численности лошадей во взаимосвязи с механизмом взаимодействия с волками является актуальной задачей.

При изучении динамики системы "хищник-жертва" обычно рассматриваются модели, основанные на модели Вольтерра-Лотка и её модификациях [2-3].

В данной работе рассматривается одна математическая модель динамики численности поголовья лошадей и волков, при наличии фактора человека:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = (a_1 - a_2y(t) - a_3u(t))x(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = (-b_1 + b_2x(t) - b_3v(t))y(t), \\ \frac{du(t)}{dt} = \alpha x(t), \\ \frac{dv(t)}{dt} = \beta y(t), \end{cases}$$

где $x(t)$ – численность поголовья лошадей; $y(t)$ – численность волков; $u(t)$ – поголовье лошадей, которое идет на потребление человеком; $v(t)$ – количество уничтоженных волков; a_1 – интенсивность естественного роста численности поголовья лошадей; a_2 – коэффициент влияния численности волков на динамику поголовья лошадей; a_3 – коэффициент потребления лошадей людьми; b_1 – коэффициент естественной динамики численности волков, без учета влияния человека и численности поголовья лошадей; b_2 – коэффициент влияния численности поголовья лошадей на рост численности волков; b_3 – коэффициент уменьшения численности волков, связанного с их отстрелом; α – коэффициент влияния численности поголовья лошадей на их потребление; β – коэффициент влияния численности волков на их отстрел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аммосов С.П. О возможности коневодства в Северных улусах Республики Саха (Якутия) // Научные основы устойчивого развития коренных народов Севера. Материалы республиканской научно-практической конференции, посвященной 75-летию со дня рождения В.А.Роббека (г. Якутск, 17 февраля 2012 года). Новосибирск: Наука. 2013. С. 142–144.
2. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука. 1976.
3. Колмогоров А.Н. Качественное исследование моделей динамики популяций // Проблемы кибернетики. 1972. Вып. 25. С. 100–106.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ СОЗДАНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ХРАНИЛИЩ ПРИРОДНОГО ГАЗА В ГИДРАТНОМ СОСТОЯНИИ

UNDERGROUND STORAGE OF NATURAL GAS IN HYDRATE STATE: INVESTIGATION OF POSSIBLE DEVELOPMENT

Бондарев Э. А.¹, Рожин И. И., Аргунова К. К.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия;

¹bondarev@ipng.yasn.ru

Одним из перспективных направлений промышленного использования газовых гидратов является хранение природных, а также парниковых и токсичных газов. Такая возможность обусловлена более значительным массовым содержанием газа в гидратном состоянии в единице объема по сравнению со свободным состоянием при той же температуре и давлении. В настоящее время подземные хранилища природного газа, в основном, создаются в пористых пластах на базе истощенных газовых и газоконденсатных месторождений и водоносных структур, расположенных вблизи трассы магистральных газопроводов или крупных центров потребления газа. Альтернативой таких хранилищ могут стать подземные хранилища газа в гидратном состоянии, т.е. в твердой фазе, которая образуется при закачке природного газа в пористые водонасыщенные коллекторы при определенных термодинамических условиях. В зоне распространения многолетнемерзлых пород этими коллекторами могут служить водоносные горизонты, которые располагаются непосредственно под подошвой многолетней мерзлоты. Преимущества такого способа заключаются в большей компактности и стабильности хранилища, т.к. газ в гидратном состоянии занимает гораздо меньший объем, чем в свободном состоянии, а при переходе в гидратное состояние связывается вся свободная пластовая вода.

В настоящее время известен способ хранения природного газа в гидратном состоянии, в котором гидраты создаются из газа и воды в специальных емкостях, располагающихся на поверхности, и в этом смысле они являются аналогом хранилищ сжиженного газа. В имеющихся научных публикациях, посвященных математическому моделированию создания подземных хранилищ природных газов в гидратном состоянии использовались модели этого процесса, основанные на большом количестве упрощающих допущений: 1) не учитывались реальные свойства природных газов; 2) не учитывалась зависимость равновесных условий образования гидратов от состава природного газа; 3) пластовая вода считалась неподвижной; 4) граничные условия ставились таким образом, чтобы свести исходную задачу к автомодельной; 5) соответствующие дифференциальные уравнения решались приближенными методами.

В рамках гидродинамики многофазных сред рассматривается метод математического моделирования нового технологического объекта – подземного хранилища природного газа в гидратном состоянии. Он позволяет оценить возможность создания такого хранилища в различных подходящих с геологической точки зрения подземных водоносных насыщенных и ненасыщенных пластиах. Метод основан на использовании математической модели неизотермической фильтрации несовершенного (реального) газа и воды, в которой химическая реакция гидратообразования происходит при температуре, существенно зависящей от давления газа. С помощью этой модели оценивается динамика распределения гидратонасыщенности, водонасыщенности, давления и температуры при различных режимах закачки в выбранном пласте, который характеризуется коллекторскими свойствами (пористостью, проницаемостью) и начальными значениями давления, температуры и водонасыщенностью. Соответствующие начально-краевые задачи решаются методом конечных разностей с использованием итерационного алгоритма и метода прогонки. В вычислительных экспериментах выявлено влияние состава природного газа, емкостных (пористость и мощность), фильтрационных (проницаемость) характеристик пластов-коллекторов и их геокриологических особенностей, а также режимов закачки газа на технологические параметры объектов в процессе их создания. Полученные результаты могут быть использованы при разработке научных основ технологий хранения природного газа в гидратном состоянии.

**РАЗНОСТНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ
СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ**
**DIFFERENCE-ANALYTICAL METHOD OF SOLVING
BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF ORDINARY
DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE BASES OF ADJOINT
EQUATIONS**

Воеводин А. Ф.

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск,
Россия;
voevodin@hydro.nsc.ru*

В работе для линейной краевой задачи предложен метод построения разностной (дискретной) краевой задачи для определения искомой функции в узлах сетки. Разностные уравнения строятся с помощью решения сопряженных уравнений на каждом элементарном отрезке. Доказано, что матрица системы разностных уравнений имеет диагонально преобладающие элементы,

что обеспечивает выполнение принципа максимума и устойчивость метода. Метод обобщается на решение двухточечных краевых задач для уравнений третьего порядка.

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

MODIFIED EQUATIONS OF THE THEORY OF PLATES AND SHELLS WITH ARBITRARY CONDITIONS ON THEIR FRONT SURFACES

Волчков Ю. М.

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск,
Россия;
volk@hydro.nsc.ru*

При сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной (теории оболочек) используются либо гипотезы кинематического и силового характера [1] либо применяются разложения решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций [2]. Гипотезы кинематического и силового характера накладывают достаточно сильные ограничения на напряженно-деформированное состояние и поэтому, как правило, с использованием таких гипотез уравнения теории оболочек строятся для случая, когда на лицевых поверхностях оболочки заданы напряжения. Решение контактных задач на основе таких уравнений зачастую приводит к эффектам нефизического характера. Применение разложений решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций позволяет построить уравнения оболочек в различных приближениях. При этом одним из основных вопросов является следующий: на основе каких дополнительных предположений строится то или иное приближение; а именно, сколько членов в разложениях нужно удерживать при построении данного приближения? Поскольку полиномы Лежандра образуют полную систему функций интегрируемых с квадратом на отрезке $[-1, 1]$ именно эта система функций обычно используется при построении уравнений теории оболочек. В докладе излагаются дифференциальные уравнения упругих слоистых оболочек в первом приближении, построенных на основе нескольких аппроксимаций каждой из искомых функций [3]. Такие уравнения обеспечивают корректную формулировку условий на лицевых поверхностях оболочки как в перемещениях, так и в напряжениях. Это позволяет построить уравнения слоистых оболочек с использованием условий спряжения на межслойных поверхностях [4].

С использованием модифицированных уравнений строятся компактные конечные элементы с условиями сопряжения смещений и напряжений по их граням.

Приводятся численные алгоритмы решения плоских задач теории упругости и задач определения напряженно-деформированного состояния в слоистых оболочках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Войновский – Кригер С. . Пластиинки и оболочки. М.: Наука, 1966.
2. Соллер А. Теории высшего порядка анализа конструкций, основанные на разложениях по полиномам Лежандра // Тр. Амер. о-ва инженеров механиков. сер. Е. Прикл. механика. 1969. Т. 36, № 4. С. 107–112.
3. Волчков Ю. М., Важева Д. В. Решение контактных задач на основе уточненной теории пластин и оболочек // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 5 С. 6–10.
4. Волчков Ю. М. Уравнения цилиндрического изгиба пластин с произвольными условиями на их лицевых поверхностях // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 1 С. 84–90.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ ТРУБОПРОВОДНОГО ТРАНСПОРТА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФАКТОРОВ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ¹

APPLICATION OF MATHEMATICAL MODELING METHODS FOR THE STUDY OF PIPELINE TRANSPORTATION SYSTEMS WHEN EXPOSED TO EXTREME ENVIRONMENTAL FACTORS

Гусев Е. Л.^{1,2}

¹ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

²Институт проблем нефти и газа СО РАН, г. Якутск, Россия;
elgusev@mail.ru

В последние десятилетия значительное внимание уделяется проблемам повышения эффективности, интенсификации систем трубопроводного транспорта, что непосредственно связано с повышением их прочности, надежности, ресурса, сейсмостойкости [1-10]. Современные подходы к решению данных проблем связаны с развитием методов математического и компьютерного моделирования на основе адекватных моделей функционирования трубопроводного транспорта при воздействии экстремальных геологического-климатических факторов внешней среды, и принятия на этой основе оптимальных решений. Разработка адекватных математических моделей функционирования трубопроводного транспорта является основой для разработки эффективных

¹Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований - грант № 13-08-00229.

методов численного расчета и оптимизации режимов трубопроводного транспорта и принятия на их основе оптимальных решений.

Одним из перспективных направлений повышения эффективности функционирования трубопроводных систем в условиях большой их протяженности, многообразия климатических и геофизических условий эксплуатации, является применение при их проектировании и эксплуатации полимерных и композиционных материалов. В последние десятилетия, в связи с разработкой новых композиционных материалов с широким разнообразием физико-механических и химических свойств возникает проблема разработки физической и геометрической структуры трубопроводной системы, обеспечивающей наиболее эффективный режим транспорта в условиях экстремальных факторов внешней среды.

В последние десятилетия, в связи с разработкой новых композиционных материалов с широким разнообразием физико-механических и химических свойств возникает проблема разработки физической и геометрической структуры трубопроводной системы, обеспечивающей наиболее эффективный режим транспорта в условиях экстремальных факторов внешней среды [11-16].

Проведено математическое моделирование процессов функционирования трубопроводного транспорта в рамках сформулированной вариационной постановки, к которой могут быть сведены задачи оптимального проектирования физической и геометрической структуры трубопроводной системы при воздействии экстремальных факторов внешней среды. В качестве математической модели функционирования трубопроводной системы в условиях экстремальных факторов внешней среды, в рассматриваемой вариационной постановке, принята система уравнений неразрывности, состояния, сохранения энергии и импульса. На основе математического и компьютерного моделирования проведено исследование функционирования трубопроводных систем при воздействии экстремальных факторов внешней среды. На основе математических моделей функционирования трубопроводных систем в условиях экстремально низких температур внешней среды проведены вычислительные эксперименты при различных значениях параметров, описывающих трубопроводную систему. На основе проведенных вычислительных экспериментов установлены закономерности зависимости оптимальной структуры трубопроводной системы от определяющих параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хариновский В.В. Повышение прочности трубопроводов в сложных условиях. М.:Недра, 1986.
2. Хариновский В.В. Надежность и ресурс конструкций газопроводов. М.: Недра, 2000.-467 с.
3. Галиуллин З.Т., Леонтьев Е.В. Интенсификация магистрального транспорта газа. М.: Недра, 1991.-272 с.
4. Шаммазов А.М. Расчет и обеспечение прочности трубопроводов, т. 1, 2, М.: Недра, 2006.

5. Сухарев М.Г., Ставровский Е.А. Методы расчета надежности магистральных газопроводов М.: Недра, 1982.
6. Айнбингер А.Б. Расчет магистральных промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость. М.: Недра, 1991. 287 с.
7. Завойчинский Б.И. Долговечность магистральных и технологических трубопроводов. Теория, методы расчета, проектирование. М.: Недра, 1992.
8. Ясин Э.М., Березин В.А., Ращенкин К.Е. Надежность магистральных трубопроводов. М.: Недра, 1972. 184 с.
9. Зайнуллин Р.С. Ресурс элементов трубопроводных систем, Уфа, 2005.-836 с.
10. Азметов Х.А. Анализ напряженного состояния подземных трубопроводов// Трубопроводный транспорт нефти, 1999, № 1, с. 40-42.
11. Богомольный В.М. Оптимальное проектирование оболочек машин, трубопроводов, агрегатов. М.:МГУС, 2003. 223 с.
12. Рекомендации по расчету трубопроводов из многослойных труб на динамические нагрузки. М.:ВНИИСТ, 1982.
13. Борисов Б.И. Защитная прочность изоляционных покрытий подземных трубопроводов. М.: Недра, 1987.
14. Гусев Е.Л. Качественные закономерности взаимосвязи параметров в оптимальных структурах в задачах оптимального синтеза неоднородных структур из дискретного набора материалов при волновых воздействиях //Доклады РАН, 1996, т.346, № 3, с. 324-326.
15. Гусев Е.Л. Качественные закономерности структуры оптимальных решений в задачах оптимального синтеза многослойных конструкций при воздействии упругих волн//Доклады РАН,1998, т. 368, № 1, с.53-56.
16. Гусев Е.Л., Бакулин В.Н., Марков В.Г. Оптимальное проектирование конструкций из композиционных и традиционных материалов. М.: Наука-Физматлит, 2008.-256 с.

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНКИ С ЗАДЕЛАННЫМИ КРАЯМИ К РЕШЕНИЮ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ¹

THE CONSIDERATION OF THE PROBLEM OF BENDING OF PLATES WITH SEALED EDGES TO THE SOLUTION OF AN INFINITE SYSTEM

Иванова О.Ф.¹, Федоров Ф. М.², Павлов Н. Н.³

^{1,3} *ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;*

² *Научно-исследовательский институт математики СВФУ, Якутск,
Россия;*

¹o_buskarova@mail.ru, ²foma_46@mail.ru, ³pnn10@mail.ru

Рассмотрим изгиб пластинки со сторонами a, b и равномерно распределенной нагрузкой. Расположим координатные оси параллельно сторонам пластины и с центром в середине пластины.

Краевая задача. Найти решение $w(x, y)$ уравнения

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} w \left(\pm \frac{a}{2}, y \right) &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \left(\pm \frac{a}{2}, y \right) = 0; \\ w \left(x, \pm \frac{b}{2} \right) &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \left(x, \pm \frac{b}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Положим

$$w = \frac{q}{8D} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) + w_1,$$

где $w_1(x, y)$ – новая функция.

Для w_1 получаем уравнение

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = 0;$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} w_1 \left(\pm \frac{a}{2}, y \right) &= 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} \left(\pm \frac{a}{2}, y \right) = \pm \frac{q}{8D} a \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right); \\ w_1 \left(x, \pm \frac{b}{2} \right) &= 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} \left(x, \pm \frac{b}{2} \right) = \pm \frac{q}{8D} b \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right). \end{aligned}$$

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект № 3047).

Рассматриваемая задача сводится к системам уравнений с бесконечным числом неизвестных A_n , B_n :

$$\beta_n B_n \sin \frac{n\pi}{2} + \sum_{r=1,3,5,\dots}^{\infty} A_r \left(\frac{n^2}{\mu^2 r^2 + n^2} \right)^2 \sin \frac{r\pi}{2} = 1;$$
$$\alpha_n A_n \sin \frac{n\pi}{2} + \sum_{r=1,3,5,\dots}^{\infty} B_r \left(\frac{n^2}{r^2 + \mu^2 n^2} \right)^2 \sin \frac{r\pi}{2} = \mu^{-4};$$

где

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{16} \left(\frac{a}{b} \right)^5 \frac{\frac{n\pi b}{a} + sh \frac{n\pi b}{a}}{ch^2 \frac{n\pi b}{2a}};$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{16} \frac{b}{a} \frac{\frac{n\pi a}{b} + sh \frac{n\pi a}{b}}{ch^2 \frac{n\pi a}{2b}}; \quad \mu = \frac{b}{a}.$$

Рассуждениями, подобными [1-2], доказывается, что системы, получающиеся при изучении прогиба прямоугольной пластинки, имеют единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Ч. 2. Спб: тип. А Э. Коллинс, 1916.
2. Кузьмин Р.О. Об одном классе бесконечных систем линейных уравнений // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук. 1934. № 4. С. 515–546.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ВОЛЬТ-АМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЕВОГО
ЭЛЕКТРОННОГО КАТОДА С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ
ФОТОЭФФЕКТА А. ЭЙНШТЕЙНА**

**MATHEMATICAL MODEL FOR DETERMINING THE
VOLTAGE-CURRENT CHARACTERISTIC OF THE FIELD
ELECTRONIC CATHODE BY APPLYING THE THEORY OF
EINSTEIN'S PHOTOELECTRIC EFFECT**

Мамаева С. Н.¹, Ноговицын П. И.², Яковлев А. М.³

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;*

¹sargylana_mamaeva@mail.ru, ²petyan1993@yandex.ru,

³andreyakovlev1994@gmail.com

Один из основных постулатов квантовой теории был сформирован при исследовании природы света. Свет до появления понятия дискретности энергии при взаимодействии его с веществом представлялся в модели Максвелла как электромагнитная волна. Электромагнитная волна и поле не описываются определенным образом в качестве материальной субстанции. А характеризуются некой субстанцией, описываемой определенными величинами, а именно напряженностями магнитных и электрических полей, характеризующие силы, действующие на заряженные частицы в этих полях. Т.е. нет прямых описаний поля и электромагнитных волн как о каких-то конкретных материальных объектах, например, как описание твердого тела как совокупности материальных точек, или как о кристаллическом твердом теле, состоящем из атомов, распределенных в пространстве определенным образом. Напряженности электромагнитных волн описываются волновыми уравнениями. И эти волны никак не связаны, например, с волной на поверхности воды, которая является механическим колебательным движением частиц воды. Т.е. есть некая субстанция, неизвестно, что собой представляющая, и величины, его характеризующие меняются по волновому закону.

Описание электромагнитных волн с помощью корпускул - фотонов дало возможность рассматривать эти поля в движении как некие материальные объекты. В настоящее время существует представление о наличии посредников четырех фундаментальных взаимодействий. Для электромагнитного взаимодействия посредником является фотон - квантовая частица. В зависимости от системы отсчета исследования полей электромагнитное поле рассматривается только как электрическое. И, если это поле, установившееся во времени, то оно рассматривается как электростатическое. Т.е. электростатическое поле определяется как частный случай электромагнитного поля. Тогда, как и для электромагнитного взаимодействия, необходимо рассматривать существование посредника для электростатического взаимодействия, и

в качестве посредника можно рассматривать фотон. Такой подход для описания электростатического поля может являться обоснованием для введения допущения о моделировании электростатического поля как электромагнитной волны большой длины волны с пренебрежительным значением магнитной составляющей.

Стационарное электрическое поле имеет одну природу со светом, который характеризуется в основном световым вектором. В данной работе производится следующее допущение: электростатическое поле рассматривается как электромагнитная волна с длиной волны огромных размеров. Тогда считаем возможным применение модели и теории Эйнштейна, описывающих фотоэффект, в рассмотрении задачи холодной эмиссии электронов в электровакумной системе, находящейся во внешнем стационарном электростатическом поле.

В данном случае рассматривается задача определения вольт-амперной характеристики пучка электронов, эмитируемых с поверхности острия в вакууме, под воздействием внешнего электростатического поля. Электростатическое поле в этом случае вызывает эмиссию электронов, также направляет и ускоряет их.

Исходя из вышеуказанных допущений в физической модели задачи определения вольт-амперной характеристики, строится математическая модель, включающая в себя уравнения Фаулера-Нордгейма для зависимости плотности тока от напряженности внешнего электрического поля и уравнения Эйнштейна для фотоэффекта. В результате численных расчетов получены вольтамперные характеристики близкие к экспериментальным зависимостям.

**ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
ПОЛЯРИЗУЩЕГОСЯ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ПЛАСТА ПРИ
ЕГО ВОЗБУЖДЕНИИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ
ДИПОЛЕМ**

**PHENOMENOLOGICAL MODEL OF UNSTABLE
ELECTROMAGNETIC FIELD OF POLARIZABLE GEOLOGICAL
STRATUM AT THE DISTURBANCE OF THE HORIZONTAL
MAGNETIC DIPOLE**

Ним Ю. А.

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
gmpirmp@mail.ru*

Представляя геометрическую модель системы, горизонтальный магнитный диполь и горизонтальный электропроводный слой в вертикальной плоскости получим модель технологии зондирования методом переходных процессов (ЗМПП) при картировании крутопадающих жил, тектонических зон и других объектов поиска, в том числе контактов кимберлитовых тел с вмещающими породами. В этой связи рассматриваемый вид источника представляет технологию зондирования ЗМПП-Х и профилирования крутопадающих объектов - рудных месторождений, в том числе в природных условиях криолитозоны [1-3].

Для моделирования индукционно-вызванной поляризации (ВПИ), «искающей» неустановившееся электромагнитное поле электропроводного пласта при исследовании диспергирующих гетерогенных и многофазных сред в модель гармонически изменяющегося поля плоскости S горизонтального магнитного диполя вводим поляризующую модель Коул-Коул, как это показано в работе [4]. Тогда коэффициент в решении уравнения Лапласа, описывающее вектор-потенциал электромагнитного поля представляется в виде:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{2e^{-2mh}}{2m + i\omega\mu \left[S_0 \frac{1+i\omega\tau}{1+(1-\eta)i\omega\tau} \right]} = \\ &= \left[\frac{2p(1-\eta)}{\mu S_0} + \frac{2}{\mu S_0 \tau} \right] / \left[p^2 + p \left(\frac{2m(1-\eta)}{\mu S_0} + \frac{1}{\tau} \right) + \frac{2m}{\mu S_0 \tau} \right], \end{aligned}$$

где $p = -i\omega$; h - высота расположения возбуждающего диполя, S_0 - продольная электропроводность слоя S ; $0 \leq \eta \leq 1$ - поляризуемость слоя, ω - круговая частота, i - мнимая единица, μ - магнитная проницаемость вакуума, τ - время релаксации, m - переменная разделения.

Применяя к этому выражению обратное интегральное преобразование Лапласа-Карлсона, после некоторых алгебраических преобразований, представим неустановившееся электромагнитное поле поляризующегося пласта в виде вектор-потенциала:

$$A_z^{x\eta}(t) = -\frac{\mu M_x}{4\pi} \int_0^\infty \cos\varphi e^{-\alpha m} e^{-at} m \left[a^* chbt + \frac{(\beta - a^* \cdot a)}{b} shbt \right] J_1(mr) dm,$$

где $\alpha = 2h+z$; r, φ, z – цилиндрические координаты; $a^* = \frac{2(1-\eta)}{\mu S_0}$; $\beta = \frac{2}{\mu S_0 \tau}$; $a = \frac{2m(1-\eta)}{\mu S_0} + \frac{1}{\tau}$; $b = \frac{m(1-\eta)}{\mu S_0}$. M_x – магнитный момент, ориентированный по оси “ x ”; $J_1(mr)$ – функция Бесселя первого порядка аргумента (mr).

Наблюдаемые на практике компоненты магнитного поля, определяются по формуле:

$$\frac{\partial}{\partial t} B_z^{x\eta}(t) = -\frac{\partial^2 A_z^{x\eta}}{\partial z^2}; \frac{\partial}{\partial t} B_r^{x\eta}(t) = -\frac{\partial^2 A_z^{x\eta}}{\partial r \partial z}.$$

Таким образом, получим аналитические модели неустановившегося электромагнитного поля в форме однократных интегралов, поддающихся численному анализу, по аналогии с работой [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ним Ю.А. Импульсная модификация электромагнитного зондирования. Сб.: научн. трудов. Геофизические исследования в Якутии, Якутск, ЯГУ, 1998. - с. 97-109.
2. Ним Ю.А., Дьячковский А.А., Адаров Т.Д. Аналитическая модель технологии импульсного электромагнитного профилирования диспергирующей вертикальной полу平面ности комплексной электропроводности / Доклады IX Межд. конф. “Новые идеи в науках о Земле”. М.: РГГУ, 2009. - с. 19
3. Жандалинов В.М. Электрические и электромагнитные зондирования при поисках коренных месторождений алмазов. – Новосибирск: Гео, 2011, 263 с.
4. Ним Ю.А., Попков П.А., Адаров Т.Д. Индукционно-вызванная поляризация электропроводного пласта при его импульсной возбуждении вертикальным магнитным диполем // Разведка и охрана недр, №12, 2013. - с. 39-41

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВАЛОВОГО ВЫПУСКА РЕГИОНА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

FORECASTING OF GROSS OUTPUT IN THE REGION ON THE BASIS OF DYNAMIC INPUT-OUTPUT BALANCE MODEL

Охлопков Г. Н.

Институт математики и информатики СВФУ, Якутск, Россия;
Gavril_nik@mail.ru

Балансовые модели, как статистические, так и динамические, широко применяются при экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов. В основе создания этих моделей лежит балансовый метод, т.е. метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них. При этом в модели межотраслевого баланса должен соблюдаться баланс между объемами произведенной и потребленной продукции, т.е. равенство их значений.

В данной работе рассматривается динамическая модель межотраслевого баланса вида [1]:

$$X(t) = AX(t) + \Phi\Delta X(t) + Y(t), \quad (1)$$

где $X(t)$ – вектор валового выпуска продукции t -го периода времени;

A – матрица коэффициентов прямых затрат межотраслевого баланса;

Φ – матрица фондоемкости прироста единицы продукции;

$\Delta X(t)$ – вектор разницы валовых выпусков t и $t-1$ периодов времени;

$Y(t)$ - вектор конечного потребления за вычетом суммы капитальных вложений по всем рассматриваемым отраслям экономики.

В рассматриваемой динамической модели межотраслевого баланса (1), производственные капитальные вложения выделяются из состава конечной продукции, что позволяет исследовать их структуру и влияние на рост объема производства, а также рассчитать их прогнозные значения. Преобразовав систему уравнений (1), получим расчетную формулу в матричной форме для нахождения значений валового выпуска продукции по отраслям экономики:

$$X(t) = (E - A - \Phi)^{-1} \cdot (Y(t) - \Phi X(t-1)), \quad (2)$$

где $X(t-1)$ – вектор валового выпуска продукции $t-1$ -го периода;

E – единичная матрица.

Как видно из формулы (2) в модели динамического межотраслевого баланса, в отличие от статической модели значения валового выпуска зависят еще и от объемов производства предшествующего периода и фондоемкости

единицы продукции. Поэтому при прогнозировании валового выпуска на основе модели динамического межотраслевого баланса можно провести анализ чувствительности решения к входным данным и исследовать ее сходимость.

Для проведения прогнозных расчетов валового выпуска продукции по формуле (2), разработаны алгоритмы ее численной реализации на ЭВМ. В качестве информационной базы прогнозных расчетов использованы фактические данные соответствующих экономических показателей из статистических сборников Территориального органа Федеральной службы государственной статистики по Республике Саха (Якутия) [2].

На основе модели динамического межотраслевого баланса проведены ретроспективные прогнозные расчеты валового выпуска продукции Республики Саха (Якутия) на 2011 г. Сравнительный анализ полученных прогнозных значений валового выпуска товаров и услуг на 2011 г. с их фактическими значениями показывает неплохо точность вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Орлова И.В. и др. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов. // М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 304 с.
2. Национальные счета в Республике Саха (Якутия) за 2005-2010 гг. Статистический сборник № 11.14.05. Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Республике Саха (Якутия). – Якутск, 2012. – 84 с.

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗГИБАНИЙ ПОВЕРХНОСТИ

ABOUT ONE MATHEMATICAL MODEL FOR SURFACE INFLECTION

Ошоров Б.Б.¹, Ошоров Бато.Б.²

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, Россия;

¹oshorovbb@pochta.ru, ²scalderfree@yandex.ru

Исследуется математическая модель бесконечно малых изгибаний поверхности положительной кривизны [1], которая сводится к задаче Римана-Гильберта с разрывными краевыми условиями для системы уравнений Коши-Римана. Несмотря на достаточно глубокое изучение этой проблемы в монографии [1], интересным остается довольно большой круг вопросов, связанных с конкретными поверхностями и условиями на границе поверхностей.

Пусть $\bar{r} = \bar{r}(t_1, t_2)$ - кусочно-гладкая поверхность $S \subset R^3$ а уравнением

$$\bar{r}_\varepsilon = \bar{r}_\varepsilon(t_1, t_2) = \bar{r}(t_1, t_2) + \varepsilon \bar{p}(t_1, t_2),$$

где ε - числовой параметр, $\bar{p}(t_1, t_2) \in C^1(\bar{S})$, задано семейство поверхностей $\{S_\varepsilon\}$ в R^3 . Если $ds_\varepsilon^2 - ds^2 = O(\varepsilon^2)$, то говорят, что поверхности S_ε являются бесконечно малыми изгибаниями поверхности S .

Для того, чтобы поверхность S_ε была бесконечно малым изгиблением поверхности S необходимо и достаточно выполнение условия

$$(d\bar{r}, d\bar{p}) = 0. \quad (1)$$

Пусть поверхность S задана явным уравнением $z = f(x, y)$, функция $f(x, y)$ рассматривается в области D , которая является проекцией поверхности S на координатную плоскость xOy . После ряда преобразований получаем систему уравнений в матричной форме

$$AU_x + BU_y = 0, \quad (2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} z_{yy} & 0 \\ -2z_{xy} & z_{xx} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & z_{xx} \\ -z_{xx} & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений (2) будет эллиптической тогда и только тогда, когда поверхность S имеет положительную гауссову кривизну. Путем неособых преобразований система (3) приводится к обобщенной системе уравнений Коши-Римана.

Пусть S - некоторая часть эллиптического параболоида $z = x^2 + y^2$. Для него система уравнений (2) сразу становится системой Коши-Римана

$$AU_x + BU_y = 0, \quad (3)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсечем от кругового параболоида $z = x^2 + y^2$ его часть S плоскостями $x = 0, x = k, y = 0, y = l$. Пусть, на границе прямоугольника D , ограниченного линиями пересечения координатной плоскости xOy с указанными выше плоскостями, выполнены условия

$$u_1(x, 0) = u_1(k, y) = u_2(0, y) = u_2(x, l) = 0. \quad (4)$$

Доказано [2], что задача (3),(4) имеет единственное тривиальное решение. Отсюда следует, что при данных условиях бесконечно малые изгиблания параболоида обеспечиваются вектором \bar{p} , который направлен по нормали к поверхности.

Численный анализ данной модели проведен по методике, разработанной в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.-512с.
2. Ошоров Б.Б. Задачи Римана-Гильберта и Пуанкаре с разрывными краевыми условиями для некоторых модельных систем уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 5. С. 696–704.
3. Ошоров Бато.Б. О разрешимости одной краевой задачи для модельной эллиптической системы уравнений в четырехмерном пространстве // Вестник Бурятского государственного университета. Сер.13. Математика и Информатика. Улан-Удэ: 2005. вып.2. С. 82–85.

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

A FICTITIOUS DOMAIN METHOD IN THE EQUILIBRIUM PROBLEM FOR A VISCOELASTIC PLATE

Попова Т. С.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
ptsokt@mail.ru

В работе рассматривается применение метода фиктивных областей в краевой задаче с односторонними граничными условиями, соответствующей контактной задаче для вязкоупругой пластины. Данные условия заданы на части гладкой границы области и имеют вид неравенств:

$$-W\nu \geq h\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right| \quad \text{на } \gamma \times (0, T).$$

Здесь γ - часть границы области Ω_1 , которую занимает срединная плоскость пластины, ν - единичный вектор нормали к γ , (W, w) - функции горизонтальных и вертикальных перемещений точек Ω_1 соответственно, h - полутолщина пластины.

Задачи такого типа обычно носят название задачи Синьорини. Эквивалентной постановкой для краевой задачи является вариационное неравенство. Задача однозначно разрешима. Фиктивная область строится так, что вспомогательная задача ставится в области с разрезом. Тогда система краевых условий, также носящих односторонний характер, задается на берегах

разреза. Одно из этих условий определяет непроникание точек противоположных берегов разреза друг в друга и имеет вид [1]

$$[W]\nu \geq h\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right] \quad \text{на } \gamma \times (0, T).$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок функции на берегах разреза.

При построении фиктивной области вводится параметр $\lambda > 0$. Доказывается, что при $\lambda \rightarrow 0$ задача Синьорини является предельной для семейства вспомогательных задач с параметром.

Применение метода фиктивных областей в задачах с односторонними ограничениями на границе можно также найти в [1-3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. Москва: Физматлит, 2010.
2. Степанов В. Д., Хлуднев А. М. Метод фиктивных областей в задаче Синьорини. Хабаровск: Дальнаука, 2003. (Препринт /2003/65).
3. Попова Т. С. Задача о контакте двух вязкоупругих пластин, одна из которых имеет трещину // Математические заметки ЯГУ. 2005. Т. 12, № 2. С. 60–92.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ СТРУКТУРНО-ЛОКАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ¹

MATHEMATICAL MODELING OF LIMIT THERMOELASTIC STATE OF COMPOSITE MATERIALS BASED ON LOCAL STRUCTURAL APPROACH

Пятаев С. Ф.

ФГБУН Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Красноярск, Россия;
e-mail psf@icm.krasn.ru

Для исследования предельного термоупругого поведения линейно-армированных композиционных материалов (КМ) на основе структурного подхода разработана модель ансамбля Ω "слоёв" волокон, окружающих выделенную область ω с одним волокном. Предлагаемая модель является развитием модели, предложенной в [1], в которой рассматривалось одиночное волокно, а взаимодействие между волокнами частично учитывалось через

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 14-01-00130)

периодические линейные краевые условия в перемещениях. КМ подвержен силовым нагрузкам и температурному воздействию, порождающим следующие состояния: однородное макронапряжённое $\hat{\sigma}_{ij}$ и неоднородное микронапряжённое σ_{ij} в Ω , не зависящее от осевой координаты x_3 вдоль волокон.

Макронапряжённое состояние раскладывалось на 5 "базисных" состояний $\hat{\sigma}_{ij}^{(m)}$, ($m = 1, \dots, 5$). Для каждого состояния методом конечных элементов получены соотношения $\sigma_{ij}^{(m)} = f_m(x_1, x_2, \hat{\sigma}_{ij}^{(m)})$. Использование линейной комбинации этих решений позволяет по заданным $\hat{\sigma}_{ij}$ определить σ_{ij} , удовлетворяющие классическому условию осреднения по объёму. На основе анализа заданных условий предельного состояния $F(\sigma_{ij}, \vec{q}) \leq 0$ (\vec{q} – вектор констант прочности) каждой фазы КМ можно вычислить критические значения σ_{ij}^* , при которых микронапряжения в какой-либо подобласти достигают поверхности $F = 0$.

Рассмотрено два варианта определения критических микронапряжений: поиск σ_{ij}^* осуществлялся во всей области Ω и в области ω . Определение σ_{ij}^* по второму варианту при увеличении числа N окружающих "слоёв" позволяет избавиться от искажения микронапряжений краевыми эффектами и, вследствие этого, определяемых критических макронапряжений $\hat{\sigma}_{ij}^*$.

Проведены численные расчеты для двух композитов – боропластика и бороалюминия. Установлено, что в зависимости от величин отношений предела прочности к модулю Юнга каждой фазы КМ предельная поверхность в пространстве трёх растягивающих макронапряжений близка к эллипсоидальной (бороалюминий) или ограниченному эллиптическому цилиндуру (боропластик).

При изменении температуры ΔT предельные поверхности $P_{\Delta T}$ возникают как результат трансляционного переноса поверхности $P_{\Delta T=0^\circ\text{C}}$. При расчётных значениях параметров материала скорость трансляции поверхности для металлического КМ оказалась выше, чем для полимерного, т. е. бороалюминий более чувствителен к изменению температуры, чем боропластик.

При поперечном или продольном нагружениях предельные величины $\hat{\sigma}_{ij}^*$ при различных значениях N практически совпадают, т. е. при некоторых нагрузлениях σ_{ij}^* , найденные в Ω и ω , близки. Однако при нагрузлениях, близких к всестороннему обжатию в трансверсальной плоскости, полимерный КМ более чувствителен к варианту определения σ_{ij}^* , чем металлический. В полимерном КМ это отличие достигает 25%, тогда как в металлическом около 4%. По видимому, это связано с меньшей разницей жесткостных характеристик компонент в металлических КМ по сравнению с разницей характеристик в полимерных.

Сравнение полученных расчетных предельных значений с экспериментальными данными [2,3] при одноосных нагрузлениях показали их хорошее совпадение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пятаев С. Ф. Структурное моделирование критерия прочности периодических композитов при сложном температурно-силовом нагружении // Дальневосточный математический журнал. 2012. Т. 12, № 2. С. 262–273.
2. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988.
3. Бобович Б. Б. Неметаллические конструкционные материалы. М.: МГИУ, 2009.

РАВНОВЕСИЕ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ

BALANCE OF MAGNETIZED PLASMA IN THE FIELD OF A MAGNETIC DIPOLE

Ромашенко Ю. А., Ефремова С. А.¹

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

¹sae_svfu@mail.ru

Целью настоящей работы является построение простой аналитической модели системы "магнитное поле диполя-промагниченная плазма". Задача рассматривается в стационарном режиме, при этом допускается, что через плазму протекает ток. Результаты задачи могут быть использованы при рассмотрении физических явлений в магнитосферах замагниченных планет, в оболочках пульсаров, а также в лабораторных условиях. При рассмотрении крупномасштабных явлений системы плазмо-магнитного поля можно с успехом применять магнитогидродинамический подход [1,2].

В качестве простейшей модели будем считать систему сферически симметричной, токи протекающие по плазме будем считать компактными образованиями с финитными или инфинитными границами с единственной азимутальной компонентой. Тогда такую систему проще всего считать системой с осесимметричной конфигурацией и применить уравнение Грэда-Шафранова.

Анализ решения уравнения показывает, что полученная система может находиться в замкнутой сфере, радиус которой определяется наличием внешнего постоянного поля.

На Рис.1 и Рис.2 показано распределение магнитного потока диполя во внешнем поле и с учетом градиента давления и токовой функции.

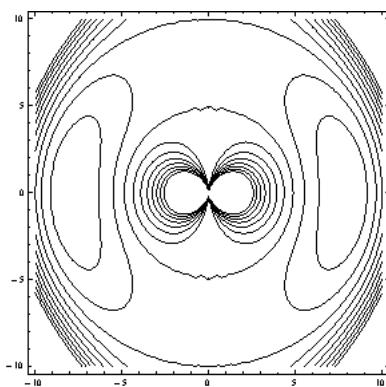
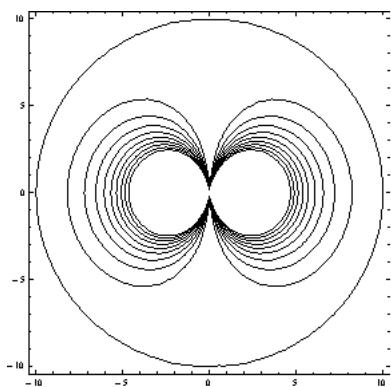


Рис 1. Магнитный поток диполя во внешнем поле

Рис 2. Магнитный поток диполя с учетом градиента давления и токовой функции

ЛИТЕРАТУРА

1. Шафранов В.Д. Равновесие плазмы в магнитном поле - В сб. "Вопросы теории плазмы" (Под ред. М.А.Леонтовича). Город: Москва Госатомиздат, 1963, вып.2, с.92-131.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1973, 749 с

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЗАМЕРЗАЮЩЕГО ГРУНТА

AN INVERSE COEFFICIENT PROBLEM FOR THE FROZEN SOIL

Рысбайулы Б.

Международный университет информационных технологий, Алматы,
Казахстан;
b.rysbaiuly@mail.ru

Известно, что в процессе замерзаний в почве образуются три зоны: талая, фазовая и мерзлая зона [1]. Если грунт находится при температуре фазовых переходов, то в различных точках грунта будет различное количество льда и незамерзшей воды. Это приводит к тому, что в зависимости от температуры будет меняться тепловые коэффициенты грунта [2]. В силу этого факта математическая модель замерзающего грунта является начально-краевая задача для нелинейного уравнения теплопроводности. Разностные методы решения прямой задачи Стефана для замерзающего грунта изучена в работе [3]. Настоящая работа посвящена к изучению нелинейной обратной задачи замерзающего грунта. Наиболее полные исследования обратных и некорректно поставленных задач математической физики с многочисленными библиографиями приводится в работе [4]. Отметим, что квазилинейная обратная задача для замерзающего грунта исследована в работе [5].

В настоящей работе разрабатывается итерационный метод нахождения тепловых коэффициентов замерзающего грунта и проделаны следующие работы:

1. Составлено дискретная нелинейная обратная разностная задача для замерзающего грунта.
2. Разработано итерационная формула для расчета искомых величин.
3. Получены априорные оценки решения нелинейных разностных задач.
4. Доказывается ограниченность приближенного значения теплового коэффициента и доказывается монотонность минимизируемого функционала.
5. Изучается метод Ньютона для решения нелинейной разностной задачи, и доказывается квадратичная сходимость метода Ньютона.
6. Проведены численные расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Е.Д. Общая геокриология. М: Издательский дом Московского Государственного университета, 2001. - 688 стр.
2. Чудновский А.Ф. Теплофизические характеристики дисперсных материалов. – М: Государственное издательство физико-математической литературы, 1982. – 456 стр.
3. Rysbaiuly B., Adamov A.A. Investigation of heat phase zone multilayer ground // Vestnik NAN RK, 2007, №4(6), pp.30-33.
4. Kabanikhin S. I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. De Gruyter, Germany, 2011, 459 p.
5. Rysbaiuly B. Mathematical properties of the iterative method to calculate the coefficient of thermal conductivity of multilayer ground // Wulfenia Journal, Austria, 2013, Volume. 20, Issue. 12, p.101-126.

РАВНОМЕРНОЕ РАЗБИЕНИЕ СФЕРЫ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБЛУЧЕННОСТИ

AN EQUAL-AREA SPLITTING OF THE SPHERE AND ITS APPLICATION FOR CALCULATION OF THE RADIATION FACTORS

Семенов М. Ф.¹, Шадрин В. Ю.²

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

¹sem.mi@mail.ru, ²vshadr@mail.ru

Пусть дана сфера с центром в начале координат $O(0, 0, 0)$ и с радиусом R . Выберем натуральное число n и положим $\alpha = \pi/(2n + 1)$. Вокруг «северного полюса» с координатами $(0, 0, R)$ описываем сегмент с центральным углом α , далее сверху вниз верхнюю полусферу разбиваем на n поясов с одинаковыми центральными углами α . Площадь сегмента при «полюсе» равна $S = 2\pi Rh$, $h = R - R \cos \frac{\alpha}{2}$.

Если пронумеровать пояса сверху вниз $i = 1, 2, \dots, n$, то площадь i -го пояса равна

$$S_i = 2\pi Rh_i, \text{ где } h_i = R \sin(n - i + 1)\alpha - R \sin(n - i)\alpha = 2R \sin \frac{\alpha}{2} \sin i\alpha.$$

Рассмотрим отношение площади i -го пояса S_i к площади «полюса» S :

$$\mu_i = \frac{S_i}{S} = \frac{2 \sin i\alpha}{\tan \frac{\alpha}{4}}.$$

Целая часть этого числа $[\mu_i]$ означает количество равновеликих секторов с площадями, равными площади «полюса», из которых состоит i -й пояс.

Положим

$$\varphi_i = \frac{\pi}{2} - \alpha \cdot i, i = 1, 2, \dots, n, \theta_{ij} = \frac{\pi(2j-1)}{\mu_i}, j = 1, 2, \dots, [\mu_i].$$

Определим упорядоченное множество равномерно распределенных точек на верхней полусфере $U_N = \{(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})\}$. Координаты точек вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= R \cos \varphi_i \cos \theta_{ij}, \\ y_{ij} &= R \cos \varphi_i \sin \theta_{ij}, \\ z_{ij} &= R \sin \varphi_i, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, [\mu_i]$. Аналогично, определим упорядоченное множество равномерно распределенных точек на нижней полусфере $U_S = \{(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})\}$.

Таким образом, мы получили упорядоченное множество точек (узлов), которые равномерно распределены по всей сфере:

$$U = U_N \cup U_S \cup P_N \cup P_S.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Справедливы следующие утверждения:

- 1) $\lim_{n \rightarrow 0} \mu_1 = 8,$
- 2) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\mu_n}{n} = \frac{16}{\pi},$
- 3) $\frac{16}{\pi} \leq \frac{\mu_i}{i} \leq 8, i = 1, 2, \dots, n.$

Множество узлов U применяется для кубатурной формулы, предложеной в работах [1,2] для приближенного вычисления коэффициентов облученности [3] между двумя сферами. Приводятся результаты численных экспериментов для случая вложенных сфер, когда известны точные значения коэффициентов облученности, а также сравнение с результатами, когда в качестве узлов кубатурной формулы берутся географические координаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Софронова Е. Ф., Шадрин В. Ю. О приближенном вычислении коэффициентов облученности при лучистом теплообмене между двумя плоскими выпуклыми четырехугольниками // Математические заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, Вып. 1. С. 166–174.
2. Семенов М. Ф., Шадрин В. Ю. Об одном разбиении круга и его применении для вычисления коэффициентов облученности при лучистом теплообмене // Материалы I Международной научно – практической конференции «Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения». Липецк, 2013. № 1. С. 28–31.
3. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М.:Мир, 1975.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

NUMERICAL SIMULATION OF ONE-PHASE STEFAN PROBLEM IN TRANSLUCENT SCATTERING MEDIUM

Слепцов С. Д.¹, Саввинова Н. А.², Рубцов Н. А.¹

¹ФГБУН Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,
Новосибирск, Россия;

²ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;

¹ sleptsov@itp.nsc.ru, ²nasavv@mail.ru

Рассмотрена однофазная задача Стефана в полупрозрачной серой кристаллической среде с учетом изотропного рассеяния в объеме. При решении условия Стефана использовался метод выпрямления фронтов, для решения радиационной части привлекался метод средних потоков.

Показана зависимость альбедо рассеяния излучения от коэффициента отражения границ. При малом отражении границ и слабом рассеянии температурное поле существенно не меняется. Увеличение коэффициента отражения правой, нагреваемой излучением, поверхности приводит к тому, что температура на ней не достигает температуры фазового перехода и, следовательно, к невыполнению условия Стефана. Температурное поле характеризуется сильным перегревом в объеме среды.

Получены условия протекания фазового перехода в зависимости от оптических свойств границ и объема среды, что позволяет создавать материалы, как тепловой защиты, так и более совершенных методов плавления.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
ВЕНТИЛЬНО-РЕАКТИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ НА ОСНОВЕ
РЯДОВ ВОЛЬТЕРРА¹**

**MATHEMATICAL MODEL OF SWITCHED RELUCTANCE
DRIVE ON THE BASIS OF VOLTERRA SERIES**

Солодуша С. В.¹, Суслов К. В.²

¹ Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск,
Россия; solodusha@isem.sei.irk.ru

² Иркутский государственный технический университет, Иркутск, Россия;
souslov@istu.edu

Вентильно-реактивные двигатели (ВРД) широко применяются в энергосберегающем оборудовании. Это определяет актуальность задачи математического описания данного электрооборудования с целью обеспечения надежности функционирования. Согласно [1] действие ВРД при фиксированном положении ротора представимо в следующем виде:

$$R \cdot I(t) + \Psi'_t(I(t), \theta) = U(t), \quad I(0) = 0, \quad \Psi(0, \theta) = 0, \quad (1)$$

где напряжение $U(t)$ (В) — входное воздействие, сила тока $I(t)$ (А) — реакция на выходе, функция $\Psi(I(t), \theta)$ (Вб) — потокосцепление фазы, θ (град) — угол положения ротора относительно статора, R (Ом) — сопротивление.

Положим в (1) $\theta = 0$. Следуя физическим соображениям [2], выберем

$$\Psi(I(t), 0) = b \cdot \ln(I(t) + 1), \quad (2)$$

где b — константа, $b > 0$, $t \in [0, T]$.

Решение задачи Коши (1), (2) имеет вид:

$$I(t) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{b} \int_0^t (R - U(s)) ds + \frac{2R}{b} t\right)}{1 + \frac{R}{b} \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{b} \int_0^s (R - U(\xi)) d\xi + \frac{2R}{b} s\right) ds} - 1, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Данный доклад посвящен приближенному описанию нелинейной динамики двумя первыми членами ряда Вольтерра на примере тестовой математической модели вида (3). Используется методика идентификации ядер Вольтерра [3], которая основана на задании специальных многопараметрических семейств кусочно-постоянных тестовых входных сигналов. Численные эксперименты проводились с учетом результатов [4].

¹ Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований № 12-01-00722-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Радимов И.Н., Рымша В.В., Малеванный О.Е. Моделирование режимов работы вентильного индукторного двигателя // Электротехника и электромеханика. 2002. № 2. С. 60–64.
2. Васильев Л. А., Мнускин Ю. В., Боев А. Е. Математическая модель вентильного реактивного двигателя на основе магнитной схемы замещения // Труды Луганского отделения международной академии информатизации. 2011. № 1. С. 10–14.
3. Апарчин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода. Теория и численные методы. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма РАН, 1999.
4. Павленко В.Д., Процына З.П. Идентификация в виде ядер Вольтерра вентильно-реактивного двигателя для целей диагностики // Научно-технический сборник Одесского национального политехнического университета "Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика". Киев: Техника, 2006. С. 354–355.

МОЗАИЧНО-СКЕЛЕТОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА¹

MOSAIC-SKELETON METHOD FOR SOLVING THE DIRICHLET'S PROBLEMS FOR THE HELMHOLTZ EQUATION

Талтыкина М. Ю.¹, Каширин А. А.²

Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской
академии наук, Хабаровск, Россия;

¹taltykina@yandex.ru, ²elomer@mail.ru

Задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца являются классическими задачами математической физики. Аналитические решения таких задач могут быть найдены лишь в случае простейших областей. Поэтому задачи Дирихле, в основном, решаются численно. Численное решение предполагает предварительное построение дискретного аналога. С вычислительной точки зрения наиболее эффективной представляется дискретизация исходных задач, сформулированных в виде эквивалентных им граничных интегральных уравнений. Тогда трёхмерная задача в неограниченной области сводится к двумерной задаче на границе области.

В данной работе задачи Дирихле формулируются в виде слабо сингулярных граничных интегральных уравнений Фредгольма первого рода [1]. Дискретные аналоги указанных уравнений могут быть построены различными способами. Здесь для этих целей используется согласованный с шагом

¹Работа выполнена при поддержке Дальневосточного отделения РАН (проект 14-III-B-01И-008)

сетки на границе области специальный метод осреднения слабо сингулярных ядер интегральных операторов [1].

Матрицы получаемых систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), аппроксимирующих интегральные уравнения, являются плотно заполненными. Поэтому вычислительная сложность решения этих систем прямыми методами имеет оценку $O(n^3)$, где n - порядок системы. Однако спектральные свойства матриц таковы, что использование для поиска приближённых решений обобщённого метода минимальных невязок (GMRES) [2] позволяет понизить эту сложность до $O(n^2)$.

В последние десятилетия развиваются методы быстрого решения СЛАУ с плотными матрицами. Называя метод «быстрым», обычно имеют в виду, что его сложность составляет $o(n^2)$, при $n \rightarrow \infty$. Для приближённых методов чаще всего отдельно выделяют зависимость сложности от параметра точности, указывая $O(n \log^a n \log^b \varepsilon^{-1})$, $a, b > 0$. Одним из «быстрых» методов является мозаично-скелетонный метод [3]. Его преимущества заключаются в том, что реализация требует изменений только на этапах построение матрицы и матрично-векторного умножения. Заметим, что метод дискретизации и процедура вычисления элементов исходной матрицы остаются прежними. Исходная матрица полностью не вычисляется и не хранится, а в процедуре матрично-векторного умножения используется некоторое её приближение. Мозаично-скелетонный метод состоит из трёх этапов: построение дерева кластеров, построение списка блоков и построение малоранговой аппроксимации. В качестве малоранговой аппроксимации используется неполная крестовая аппроксимация [3].

Для практической оценки эффективности метода рассматривались внутренние и внешние задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в областях, границами которых являются сфера и трехосный эллипсоид [4]. Количество точек дискретизации варьировалось от 1000 до 128000, волновые числа выбирались из промежутка от 1 до 30. Результаты экспериментов показали, что за счёт применения мозаично-скелетонного метода время работы GMRES растет в 2-2,5 раза при удвоении количества точек сетки, тогда как без его использования – в 4. В некоторых экспериментах время расчётов при использовании метода уменьшилось почти в 100 раз. При этом погрешности вычисления решений интегральных уравнений и задач Дирихле остались прежними.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каширин А. А., Смагин С. И. О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52, № 8. С. 1492–1505.
2. Saad Y. GMRES: a general minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci Stat. Comput. 1986. Т. 7, № 3. Р. 856–869.
3. Tyrtyshevnikov E. E. Incomplete cross approximations in the mosaic-skeleton method // Computing. 2000. Т. 64, № 4. Р. 367–380.
4. Талтыкина М. Ю., Каширин А. А. Применение мозаично-скелетонного метода при численном решении трёхмерных задач Дирихле для уравнения Гельмгольца в интегральной форме // Препринт 2013/195. Хабаровск: ВЦ ДВО РАН, 2013. 23 с.

АНАЛИЗ ЗАДАЧ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ С РАДИАЦИОННЫМ ТЕПЛООБМЕНОМ¹

ANALYSIS OF THE PROBLEM OF NATURAL CONVECTION WITH RADIATIVE HEAT TRANSFER

Чеботарев А. Ю.^{1,2}, Гренкин Г. В.^{1,2}

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
cheb@iam.dvo.ru

² Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия;
gleggrenkin@gmail.com

Установившийся процесс свободной конвекции вязкой несжимаемой жидкости с учетом радиационного и кондуктивного теплообмена в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ моделируется в нормализованном виде следующей системой, где используется P_1 (диффузионное) приближение для уравнения переноса излучения.

$$-a\Delta\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a\theta^4 = b\kappa_a\varphi, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a\theta^4 \quad (1)$$

$$-\nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \beta\theta\mathbf{g} = -\nabla p, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, \mathbf{v} – скорость, p – давление, \mathbf{g} – вектор ускорения свободного падения. Через a, ν, β обозначены положительные постоянные коэффициенты температуропроводности, кинематической вязкости и теплового расширения. Параметры $\alpha > 0$, $b > 0$ и коэффициент поглощения κ_a описывают радиационно-термические свойства

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 14-01-00037)

среды. Уравнения (1),(2) дополняются краевыми условиями на границе Γ области течения

$$\theta|_{\Gamma} = \Theta_0, \quad \alpha \partial_n \varphi + \gamma(\varphi - \Theta_0^4)|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma} = \mathbf{v}_0. \quad (3)$$

Здесь ∂_n – производная в направлении внешней нормали к Γ . Функция $\Theta_0 > 0$, функция $\gamma > 0$, описывающая отражающие свойства границы, и вектор-функция \mathbf{v}_0 являются заданными.

Исследование задач сложного теплообмена в рассеивающих средах с отражающими границами имеет особое значение в силу своей прикладной значимости. Значительное внимание уделяется численному моделированию процессов радиационного, кондуктивного и конвективного переноса тепла в сплошных средах. В то же время не так много работ, посвященных теоретическому анализу соответствующих краевых задач, который позволяет оценить адекватность моделей радиационного теплообмена.

Основные результаты данной работы состоят в получении новых априорных оценок полей температуры и интенсивности излучения, на основе которых доказывается разрешимость задачи (1)–(3). Показано, что класс слабых решений гомеоморфен конечномерному компакту, а при достаточно больших значениях вязкости и температуропроводности решение единственno. Кроме того, найдены условия, при которых решение стационарной краевой задачи (1)–(3) является устойчивой особой точкой соответствующей эволюционной системы, описывающей нестационарную тепловую конвекцию с радиационным теплообменом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kovtanuk A. E., Chebotarev A. Yu. Стационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С.191-199.
2. Kovtanuk A. E., Chebotarev A. Yu., Botkin N. D., Hoffmann K.-H. The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 409. P. 808–815.
3. Kovtanuk A. E., Chebotarev A. Yu., Botkin N. D., Hoffmann K.-H. Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 412. P. 520–528.

**ПРОБЛЕМЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
МОРСКОГО ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА**
**PROBLEMS OF NUMERICAL SIMULATION OF THE SEA ICE
COVER**

Четырбоцкий А. Н¹, Четырбоцкий В. А²

¹*Дальневосточный геологический институт ДВО РАН, Владивосток,
Россия; Chetyrbotsky@yandex.ru*

²*Московский государственный университет, Москва, Россия;
ve14232@gmail.com*

Морской ледяной покров (МЛП) является важной составляющей системы атмосфера-суша-океан-криосфера. Детальное численное моделирование АЛП возможно только при наличии большого объема разнообразных по своей природе экспериментальных данных. Для формирования соответствующей статистической выборки необходимо учитывать трудности проведения в условиях Арктики подобных экспериментов, отсутствие длинных рядов динамических переменных, их пространственно-временную нерегулярность, сложности согласования разнородных многомерных данных, наличие пропущенных значений и т.д.[3]. Вследствие отсутствия на текущий момент столь подробных выборок данных, важным являются задачи изучения АЛП без учета детальных пространственно-временных особенностей его составляющих. Поэтому представляется актуальным разработка крупномасштабных моделей динамики МЛП, для выполнения которого требуется достаточно ограниченная статистическая выборка.

Для моделирования крупномасштабной динамики МЛП здесь используются формальные положения системы ресурс-потребитель: на стадии формирования МЛП доступным для него ресурсом является морская вода, а на стадии таяния составляющие системы их позиции «меняются» на противоположные. Если рассматриваются только усредненные характеристики процессов, то его динамика определяется уравнением [4]

$$dA/dt = \psi(t) (A^* - A) A, \quad (1)$$

Где $\psi(t)$ характеризует внешнее воздействие на МЛП; A^* - его максимальная и текущая площади. Уравнение (1) является частным случаем уравнения Бернулли, решение которого легко записывается в квадратурах

$$A(t) = A^* \left\{ 1 - \left[1 + C \exp(A^* \int_0^t \psi(\tau) d\tau) \right]^{-1} \right\}, \quad (2)$$

где $C = A_0/(A^* - A_0)$ и A_0 площадь МЛП в начальный момент его рассмотрения. Параметрическая идентификация (2) была выполнена на основании доступной для использования выборки <http://nsidc.org/data/search/>.

Выполненный на основании модели (2) прогноз состояния Арктического ледяного покрова на период 2013-2113 гг. представлен на рис 1.

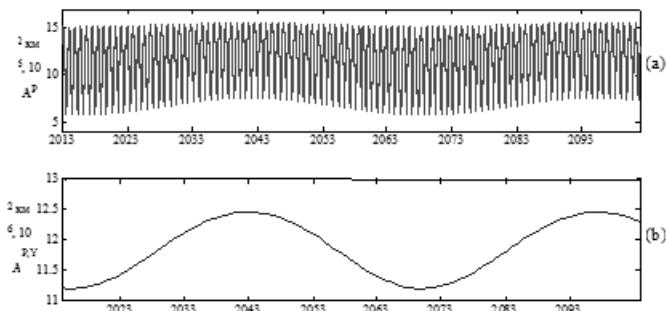


Рис 1. Прогноз состояния площади Арктического ледяного покрова на период 2013-2113 годы: а – среднемесячное распределение, б – среднегодовое распределение.

Характер распределения на рис.1а показывает, что его динамику определяет суперпозиция 3-х природных ритмов различной периодичности: высокочастотная составляющая характеризует воздействие на АЛП близких к сезонным факторов; составляющая с периодичностью в 1 год – вращение Земли вокруг Солнца; низкочастотная 60-ти летняя составляющая – аномалии среднегодовой температуры воздуха.

Анализ распределения на рис.1б показывает существенное его существенное отличие от прогнозов состояния АЛП, расчеты которых выполнены на основании представлений о росте выбросов в атмосферу парниковых газов и их влиянии на потепление климата [5,6]. Согласно этим моделям площадь морских льдов в Арктике в 21-м веке будет снижаться в связи с ростом температуры, который обусловлен увеличением выбросов в атмосферу парниковых газов (современная концентрация CO_2 в атмосфере составляет 0.03%) [7]. Однако в настоящее время имеет место значительное рассогласование между ростом их выброса и потеплением температуры. Так прогнозируемое на основе парникового эффекта потепление должно было составлять $0.28^{\circ}C$ в 1985 году и $0.65^{\circ}C$ в 2000 году, тогда как реальные потепления составили соответственно $0.12^{\circ}C$ и $0.28^{\circ}C$ [1]. Замечено также, что с 2002 года при росте в атмосфере концентрации CO_2 на Земле прекратился рост ее средней температуры. Дополнительно следует заметить отсутствие строгого доказательства корреляции между концентрацией CO_2 в атмосфере и ее температурой. В связи с чем убедительным представляется, что основным фактором климатических изменений масштаба десятков и сотен лет являются естественные

колебания полного потока солнечной энергии (электромагнитной и корпускулярной), поступающей к Земле [2].

Согласно выполненному на основании модели (8) прогнозу среднегодовое состояние АЛП до 2020 года останется на уровне современного состояния (на уровне 2013 года). Максимум его площади будет приходиться примерно на 2043 год. Этот результат практически совпадает с выполненным в ААНИИ прогнозом. Согласно ему повышенная площадь АЛП ожидается с 2020 по 2040 год, с достижением максимума в период с 2030 по 2035 год.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В.Н., Петрушина М.Н., Фролов Д.М. Закономерности формирования стратиграфии снежного покрова // Лед и снег, № 1, 109, с. 58–72. 2010
2. Фролов И.Е., Гудкович З.М., Карклин В.П., Смоляницкий В.М. Изменения климата Арктики и Антарктики – результат действия естественных причин // Проблемы Арктики и Антарктики. Т. 2. № 85. С. 52–61. 2010.
3. Четырбоцкий А.Н., Плотников В.В. Ледяной покров Японского моря: анализ данных и моделирование. Владивосток: Дальнаука. 146 с. 2005.
4. Четырбоцкий А.Н. Крупномасштабное математическое моделирование пространственно-временной изменчивости морского ледяного покрова (на примере Японского моря). Владивосток: Дальнаука, 192 с. 2009
5. Polyak L., Alley R., Andrews J.T., Brigham-Grette J., Cronin T.M., Darby D.A., Dyke A.S., Fitzpatrick J.J., Funder S., Holland M., Jennings A.E., Miller G.H., O'Regan M., Savelle J., Serreze M., Johnm K.S., White J/W.C., Wolff E. History of sea ice in the Arctic// Quaternary Science Reviews №29, P. 1757–1778. 2010.
6. Stroeve J., Holland M.M., Meier W., Scambos T., Serreze M. Arctic sea ice decline: Faster than forecast// Geophysical Res. Lett., 2007. Vol. 34. P.1-5.
7. Zhang, X., and J. E. Walsh. Towards a seasonally ice-covered Arctic Ocean: Scenarios from the IPCC AR4 simulations, J. Clim., 19, P.1730–1747. 2006

**ОБ ОДНОМ МНОГОСЕТОЧНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА
ДВУМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ
ПОЛЕЙ НАРУЖНЫХ ОГРАЖДАЮЩИХ КОНСТРУКЦИЙ С
ОСОБЕННОСТЯМИ**

**ON THE MULTIGRID METHOD OF CALCULATION OF
TWO-DIMENSIONAL STATIONARY TEMPERATURE FIELDS
OF OUTER BOUNDING CONSTRUCTIONS WITH
PECULIARITIES**

Шадрин В. Ю.¹, Павлов Н. Н.²

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени
М.К.Аммосова", Якутск, Россия;
¹vshadr@mail.ru, ²pnn10@mail.ru*

При расчете стационарных температурных полей наружных ограждающих конструкций с угловыми элементами и (или) с соседними материалами с несоизмеримыми размерами и тысячекратным перепадом значений коэффициентов теплопроводности наблюдается замедление скорости сходимости итерационных методов решения [1]. Эффективным численным методом решения систем уравнений, аппроксимирующих дифференциальные и интегральные уравнения, является многосеточный метод, который впервые был предложен Р.П.Федоренко [2]. В данной работе предложен многосеточный метод решения третьей краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\lambda \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + \alpha_{cp}(U - T_{cp}) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Приводятся результаты и анализ численных экспериментов. Результаты показали высокую эффективность предложенного многосеточного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов Н.Н., Шадрин В.Ю. Численное моделирование и анализ расчета теплообмена в наружных ограждающих конструкциях с особенностями // Вестник СВФУ имени М.К. Аммосова. 2013. Т. 10, № 2. С. 5–10.
2. Федоренко Р.П. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений // Успехи математических наук. 1973. 28:2(170), С. 121–182.

МЕТОДЫ НЕЙРОСЕТЕВОЙ АППРОКСИМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОФИЗИКИ NEURAL NETWORK APPROXIMATION METHODS IN NONLINEAR INVERSE PROBLEMS OF GEOPHYSICS

Шимелевич М. И.

Российский государственный геологоразведочный университет имени
Серго Орджоникидзе, Москва, Россия;
shimelevich-m@yandex.ru

Коэффициентные обратные задачи геофизики (геоэлектрики, сейсмики и др.) в результате конечномерной аппроксимации исходного интегрального или дифференциального оператора прямой задачи сводятся к решению конечномерного нелинейного операторного уравнения I рода на некоторой сетке Q_N задачи:

$$As = e, \quad s \in S \subset \mathbb{R}^N, \quad e \in \mathbb{R}^M, \quad M \geq N, \quad (1)$$

где $s = (s_1, \dots, s_N)$ – искомый вектор, определяющий аппроксимацию функции искомого физического параметра на сетке Q_N , A – заданный численный оператор прямой задачи, S – замкнутое ограниченное подмножество в \mathbb{R}^N априорных ограничений вида: $s_n^{min} \leq s_n \leq s_n^{max}$, $n = 1, \dots, N$, $e = (e_1, \dots, e_M)$ – вектор входных данных. Задача решения уравнения (1) в общем случае является практически неустойчивой (плохо обусловленной). Степень практической неустойчивости задачи определяется модулем непрерывности обратного оператора для уравнения (1). Автором предлагается метод регуляризации задачи, основанный на построении *регуляризованной сетки обратной задачи* Q'_N , адаптированной к свойствам оператора прямой задачи. Минимальная величина ячеек и размерность N регуляризованной сетки определяется из условия, при котором *расчетные значения модуля непрерывности обратного оператора* задачи на сетке Q'_N не превышают заданной величины [1,2]. Обратная задача (1) на сетке Q'_N является практически устойчивой и любое приближенное решение, сопоставимое по точности с входными данными может быть принято за приближенное. В работе

применяется аппроксимационный подход, при котором приближенное решение (1) ищется в виде заданной функции Ψ (нейросети) от входных данных $e = (e_1, \dots, e_M)$ [3]: $s \approx \Psi(V, W, e)$, где V, W - матрицы свободных коэффициентов нейросети, для определения которых решается задача *обучения нейросети* [3]. Если матрицы коэффициентов нейросети определены, то решение уравнение может быть получено в аналитическом виде для любых данных. Теоретическое обоснование применения нейросетевых конструкций для построения конечномерных отображений опирается на теоремы Колмогорова [4] и Цыбенко [5]. Для найденного приближенного нейросетевого решения уравнения (1) вычисляется апостериорная оценка погрешности.

В работе представлены примеры численных решений 2D и 3D обратных задач геоэлектрики для модельных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шимелевич М. И. Методы повышения устойчивости инверсии данных геоэлектрики на основе нейросетевого моделирования // Геофизика. 2013. № 10. С. 49–56.
2. Шимелевич М. И., Оборнев Е. А., Оборнев И. Е., Родионов Е. А. Численные методы оценки степени практической устойчивости обратных задач геоэлектрики // Физика Земли. 2013. № 3. С. 58–64.
3. Шимелевич М. И., Оборнев Е. А. Аппроксимационный метод решения обратной задачи МТЗ с использованием нейронных сетей // Физика Земли. 2009. № 12. С. 22–38.
4. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114. С. 953–956.
5. Cybenko G. Approximation by superpositions of a Sigmoidal Function // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 1989. V. 2. C. 303–314.

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ	4
<i>Botkin N.D.</i> Mathematical modeling of physical processes in biology	4
<i>Čelikovský S.</i> Underactuated Walking Control via the Kinetic Symmetry	6
<i>Hasanoglu A., Baysal O.</i> Inverse problems related to a Timoshenko beam and applications in engineering sciences	8
<i>Kolokoltsov V.N.</i> Mean-field games and their applications	9
<i>Popivanov N.</i> Supercritical and critical cases for 2D and 3D BVP for quasilinear equations of mixed elliptic-hyperbolic type	10
<i>Tani A., Honda H.</i> Small-time Solvability of Primitive Equations of the Coupled Atmosphere and Ocean	11
<i>Tordeux S.</i> Modeling of the damping of Multiperforated plates	12
<i>Авдеев А.В.</i> Современные тенденции разработки высокопроизводительных приложений: обзор новейших программных инструментов Intel, примеры их эффективного использования и специальные программы Intel для поддержки разработчиков	13
<i>Вабищевич П.Н.</i> Численное решение краевой задачи для дробной степени эллиптического оператора второго порядка	14
<i>Коjsанов А.И.</i> О разрешимости некоторых задач сопряжения для неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка	15
<i>Лазарев Н.П.</i> Задача о равновесии пластины тимошенко с наклонной трещиной	16
<i>Пятков С.Г.</i> О некоторых классах обратных задач для параболических уравнений	17
<i>Раджевич Е.В.</i> Многокомпонентная система Эйлера, невязкие решения	18
<i>Сабитов К.Б.</i> Коэффициентные обратные задачи для уравнений смешанного типа	18

<i>Солдатов А.П.</i> Задача Дирихле для гармонических функций на двумерном комплексе	20
<i>Субботина Н.Н.</i> Анализ математических моделей динамики с помощью методов теории оптимального управления	22
<i>Федоров Ф.М.</i> Об общей теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений	24
Секция I. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ 26	
<i>Avdonina E., Ibragimov N., Khamitova R.</i> Exact solutions of gasdynamic equations obtained by the method of conservation laws	26
<i>Chirkunov Y.A.</i> Partially invariant nonlinear oscillations viscoelastic bar	26
<i>Gurbanov P.</i> Some nonlocal problem for mixed equation with second order	27
<i>Абдрахманов А.М.</i> Видоизмененная задача Дирихле для многомерной эллиптической системы с переменными коэффициентами .	28
<i>Алсыкова А.А.</i> О разрешимости краевых задач для некоторых уравнений типа Буссинеска	29
<i>Антипин В.И.</i> Исследование гладкости решений краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа .	30
<i>Атласова Е.И.</i> Разрешимость некоторых новых задач сопряжения для неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка	31
<i>Гадоев М.Г., Егоров И.Е.</i> О некоторых спектральных свойствах одного класса несамосопряженных эллиптических операторов второго порядка	32
<i>Гималтдинова А.А.</i> Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области	34
<i>Гусельников С.В., Коjsанов А.И.</i> О некоторых математических задачах динамики биологических популяций	36
<i>Джамалов С.З.</i> Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа высокого порядка	37
<i>Егоров И.Е.</i> О краевой задаче для уравнения смешанного типа со спектральным параметром	38
<i>Ефимова Е.С.</i> О модифицированном методе Галеркина для полулинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени	39
<i>Зикиров О.С.</i> Разрешимость нелокальной задачи для гиперболических уравнений третьего порядка	40

<i>Иванова Н.Д., Фёдоров В.Е.</i> Нелинейная обратная задача для вырожденного эволюционного уравнения	42
<i>Колтуновский О.А.</i> Радиально-симметричное решение одной обратной задачи для гиперболического уравнения	43
<i>Короткова Е.М.</i> О некоторых обратных задачах для линеаризованной системы тепломассопереноса	44
<i>Кошелева Ю.А.</i> О разрешимости некоторых линейных обратных задачах для ультрапараболических уравнений с неизвестной правой частью	46
<i>Кравчук А.С., Попова Т.С.</i> Определение фрактальных свойств поверхности твердого тела	47
<i>Лукина Г.А.</i> Нелокальные задачи с условиями интегрального вида для $(2m+1)$ -параболических уравнений	48
<i>Марков В.Г.</i> Разрешимость краевой задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка	49
<i>Намсараева Г.В.</i> Об обратных задачах для некоторых дифференциальных уравнений	50
<i>Николаев Н.Н.</i> Исследование разрешимости обратной задачи для одного уравнения третьего порядка	51
<i>Новицкая А.Н.</i> Интегралы типа Эйлера для гипергеометрической функции $F_8^{(4)}$	53
<i>Павлов С.С.</i> Коэффициентная обратная задача для неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка с интегральным преопределением	54
<i>Петрушко И.М.</i> О первой смешанной задаче для вырождающихся параболических уравнений с меняющимся направлением времени	55
<i>Пинигина Н.Р.</i> Краевые задачи для некоторых классов уравнений составного типа высокого порядка	57
<i>Подгаев А.Г., Лисенков К.В.</i> Краевые задачи для вырождающихся параболических уравнений в областях с немонотонной нецилиндрической или неизвестной границей	59
<i>Попов Н.С.</i> О разрешимости нелокальных краевых задач для неклассических уравнений третьего порядка	61
<i>Попов С.В.</i> О разрешимости нелокальных краевых задач для неклассических уравнений третьего порядка	63
<i>Потапова С.В.</i> Об одной задаче сопряжения для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками	64
<i>Прокопьев А.В.</i> Коэффициентные обратные задачи для эллиптико-параболического уравнения	65

<i>Прудников В.Я.</i> Критерий H - свойства функционалов	66
<i>Сафууллова Р.Р.</i> Нелинейные обратные задачи для гиперболического уравнения второго порядка	67
<i>Семенова Е.А.</i> Об одном уравнении третьего порядка с нелокальными условиями Самарского	69
<i>Сидоров С.Н.</i> Краевая задача для вырождающегося уравнения смешанного типа с неизвестными правыми частями	70
<i>Синявский А.Г., Попов С.В.</i> Исследование гладкой разрешимости краевой задачи для $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением времени с полной матрицей условий склеивания	71
<i>Спирidonова Н.Р.</i> Начально-краевая задача в бесконечном цилиндре для неклассических дифференциальных уравнений	72
<i>Телешева Л.А.</i> Разрешимость линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с двумя неизвестными коэффициентами	73
<i>Тихонова И.М.</i> Применение модифицированного метода Галеркина к уравнению смешанного типа	74
<i>Федоров В.Е., Гордиеевских Д.М.</i> Один класс вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка	75
<i>Хашимов А.Р., Ахмедов М.И.</i> О некоторых задачах для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа	77
<i>Холиков Д.К.</i> Об одной нелокальной задаче для нагруженного уравнения Аллера	78
<i>Хлуднев А.М.</i> Иерархия тонких включений в упругих телах	79
<i>Чусшева Н.А.</i> Два дифференциальных уравнения шестого порядка	80
<i>Шадрина Н.Н.</i> О разрешимости некоторых задач сопряжения для уравнений эллиптического типа	82
<i>Юлдашева А.В.</i> О разрешимости одной некорректной задачи	84
 Подсекция I.I Оптимальное управление и конфликтно управляемые процессы	
<i>Akimov F.R.</i> Online matching in game theory	85
<i>Turova V.L., Lampe R., Botkin N.D., Blumenstein T., Alves-Pinto A.</i> Autoregulation of cerebral blood flow: towards preventing intracranial hemorrhages in premature newborns	87
<i>Беркетов Г.А., Романова Е.В.</i> Исследование гладкости решений краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа	88

<i>Егоров Р.И., Кайгородов С.П.</i> О теоретико-игровой интерпретации задачи выбора банковских процентных ставок	90
<i>Катковская К.В.</i> Математическое моделирование системы управления виброзащитным устройством на основе нейронного регулятора	92
<i>Колокольцов В.Н., Троева М.С.</i> Аппроксимация играми среднего поля управляемых нелинейных марковских процессов с прыжками	94
<i>Кутукова Л.Т.</i> Возмущения специального вида, разбивающие сложный цикл	95
<i>Лукин В.С.</i> Об одной дифференциальной игре описывающей загрязнение окружающей среды	96
<i>Местников С.В., Петров Н.В., Эверстова Г.В.</i> Численное построение информационных множеств в игре простого поиска с нарядом преследователей и оценки вероятности обнаружения . .	97
<i>Флегонтов А.В.</i> К вопросу о структурно управляемых обратимых системах	98
Секция II. МЕТОДЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ 100	
<i>Бородин О.В., Иванова А.О.</i> Новые результаты о комбинаторном строении 3-многогранников	100
<i>Иванова А.О., Никифоров Д.В.</i> Комбинаторное строение триангулированных 3-многогранников с минимальной степенью 5 . . .	102
<i>Мальцев И.А.</i> Гипертождества, разделяющие квазилинейные клоны на трехэлементном множестве	103
<i>Никитин И.В.</i> Состав и свойства классов полиномов, сохраняющих блочные разбиения дискретных и непрерывных множеств . .	105
<i>Ноговицын Д.А., Шамаев Э.И.</i> Сходимость потока биссектрис для строго выпуклых многоугольников	107
<i>Поляков Н.Л.</i> О клоновом подходе к некоторым теоремам о невозможности	108
<i>Федоров Ф.М., Иванова О.Ф., Павлов Н.Н.</i> Строгое частное решение и совместность бесконечных систем	110
Секция III. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ 112	
<i>Glasko Y.V., Volotskov M.Y.</i> Mathematical model 3.5D concentration of mass, the algorithm and the calculation experiment	112

<i>Guzev M.A., Kradin N.N., Nikitina E.Y.</i> К моделированию слабоформализованных предметных областей	114
<i>Абдурахимов А.</i> Работа реактора в псевдоожженном слое	114
<i>Акимов М.П., Захаров П.Е.</i> Моделирование динамики температурного поля многолетнемерзлых грунтов при воздействии бесканальных подземных трубопроводов методом конечных элементов	116
<i>Аммосова О.А., Старостин Н.П.</i> Границы зон термического влияния при сварке полиэтиленовых трубстык	117
<i>Аммосова О.А., Старостин Н.П.</i> Моделирование температурного поля при муфтовой сварке полимерных труб	119
<i>Антонов М.Ю.</i> Оценка профилей потенциала средней силы методом Umbrella Sampling для трансмембранного переноса молекулы воды	121
<i>Anapczyn A.C., Сидлер И.В.</i> Интегральные модели долгосрочного развития ЭЭС россии	122
<i>Беркे B.C.</i> Моделирование развития розничной торговли на территории мегаполиса	124
<i>Бондарев Э.А., Григорьев А.В.</i> Численное моделирование фильтрации природного газа на основе модели двойной пористости . .	126
<i>Вабищевич П.Н., Васильев А.О.</i> Метод конечных элементов для двухгруппового уравнения диффузии нейтронов в гексагональной геометрии	127
<i>Васильев М.Д., Трофимцев Ю.И.</i> Моделирование непрерывно пополняемой популяции	128
<i>Васильева М.А., Кондаков А.С., Старостин Н.П.</i> Упрощенная трехмерная модель теплового процесса и определение функции теплообразования в полимерных подшипниках скольжения	130
<i>Васильева М.А., Старостин Н.П.</i> Моделирование подогрева нагретым воздухом длинномерных полиэтиленовых труб	131
<i>Гамзаев Х.М.</i> Об одной задаче ненасыщенной фильтрации с неизвестной границей	133
<i>Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.</i> Нестационарная задача сложного теплообмена	134
<i>Григорьев Ю.М.</i> Учет вязкости в математической модели движений твердого и жидкого ядер земли, вызванных приливным деформированием	136

<i>Гусев Е.Л.</i> Разработка и применение методов математического и компьютерного моделирования для решения задач оптимального проектирования композиционных конструкций с требуемым комплексом свойств при воздействии упругих, сейсмических волн	138
<i>Григорьев Ю.М., Борисова М.Н., Собакина В.У.</i> Математическое моделирование грозовых перенапряжений в многопроводных линиях передач в условиях криолитозоны	140
<i>Даниленко Е.А.</i> Построение диффузационного и двухпотокового приближений для уравнения переноса	141
<i>Егорова А.А., Матаркин С.В., Шарин Е.П.</i> Форма линии ядерного магнитного резонанса вблизи поверхности сверхпроводящей пластины	143
<i>Павлов Н.Н., Федоров Ф.М., Иванова О.Ф.</i> О главном и строго частном решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений	144
<i>Попов В.В.</i> Численная реализация математической модели промерзания влажного грунта	146
<i>Иванов Б.Д.</i> Сравнение времени разработки газ-газогидратного пласта, определённого из интегрального материального баланса и численного метода	147
<i>Иванова С.С., Васильева М.В.</i> Численное моделирование процессов теплопереноса в многолетнемерзлых грунтах	150
<i>Карачанская Е.В.</i> О моделировании случайных блужданий в пространстве	150
<i>Крылова Е.А.</i> Численное решение обратной задачи Стефана методом введения распределенного источника теплоты	152
<i>Михайлов С.Я., Тимофеева Т.С.</i> Вычислительные методы в разработке месторождений нефти	154
<i>Николаев В.Е., Иванов Г.И.</i> Влияние теплообмена пласта-коллектора с вмещающими породами на неизотермическую фильтрацию реального газа при нагнетании	155
<i>Николаева М.А., Васильева М.В.</i> Численное моделирование задач пороупругости на вычислительном кластере	155
<i>Ним Ю.А.</i> Феноменологическая модель неустановившегося электромагнитного поля поляризующегося геологического пласта при его возбуждении вертикальным магнитным диполем	156
<i>Новиков Е.А., Новиков А.Е.</i> Модификация метода Фельберга седьмого порядка	158

<i>Пермяков П.П., Попов Г.Г., Аммосов А.П.</i> Математическое моделирование температурных режимов грунтовых оснований линейных инженерных сооружений при современном изменении климата	160
<i>Поликарпова О.Д., Тимофеева Т.С.</i> Численное исследование неравновесной двухфазной фильтрации	161
<i>Пятков С.Г., Сафонов Е.И.</i> Численное моделирование в задачах тепломассопереноса	162
<i>Руднев К.К.</i> Численный алгоритм оценивания параметров нелинейной стационарной Многомерной динамической системы при наличии помех в выходных сигналах	163
<i>Семашкин В.Г.</i> Численный метод оценивания параметров нелинейной динамической системы разного порядка с помехами в выходных сигналах	165
<i>Тихонов А.Г.</i> Восстановление краевого условия для параболического уравнения	167
<i>Тихонов Р.С., Старостин Н.П.</i> Моделирование теплового процесса в системе подшипников на общем валу при малых скоростях вращения	168
<i>Цветков Е.А.</i> Весовые методы Монте-Карло на произведении вероятностных пространств	169
Секция IV. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ 172	
<i>Chirkunov Y.A., Pikmullina E.O.</i> Invariant submodels of the thermal motion of a gas	172
<i>Аммосов С.П., Дягилев Г.Т.</i> Об одной математической модели прогнозирования при эпизоотии сибирской язвы лошадей в Якутии	173
<i>Аммосов С.П., Кайгородов С.П.</i> Об одной модели динамики численности поголовья лошадей и волков в Республике Саха (Якутия)	175
<i>Бондарев Э.А., Рожин И.И., Аргунова К.К.</i> Исследование возможности создания подземных хранилищ природного газа в гидратном состоянии	177
<i>Воеводин А.Ф.</i> Разностно-аналитический метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений на основе сопряженных уравнений	178
<i>Воликов Ю.М.</i> Модифицированные уравнения теории пластин и оболочек с произвольными условиями на лицевых поверхностях	179

<i>Гусев Е.Л.</i> Применение методов математического моделирования для исследования систем трубопроводного транспорта при воздействии экстремальных факторов внешней среды	180
<i>Иванова О.Ф., Федоров Ф.М., Павлов Н.Н.</i> Сведение задачи об изгибе пластиинки с заделанными краями к решению бесконечной системы	183
<i>Мамаева С.Н., Ноговицын П.И., Яковлев А.М.</i> Математическая модель определения вольт-амперной характеристики полевого электронного катода с применением теории фотоэффекта А.Эйнштейна	185
<i>Ним Ю.А.</i> Исследование гладкости решений краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа	187
<i>Охлопков Г.Н.</i> Прогнозирование валового выпуска региона на основе модели динамического межотраслевого баланса	189
<i>Ошоров Б.Б., Ошоров Бато.Б.</i> Об одной математической модели изгибаний поверхности	190
<i>Попова Т.С.</i> Метод фиктивных областей в задаче о равновесии вязкоупругой пластины	192
<i>Плятаев С.Ф.</i> Математическое моделирование предельного термоупругого состояния композиционных материалов на основе структурно-локального приближения	193
<i>Ромашенко Ю.А., Ефремова С.А.</i> Равновесие замагниченной плазмы в поле магнитного диполя	195
<i>Рысбайулы Б.</i> Коэффициентная обратная задача для замерзающего грунта	197
<i>Семенов М.Ф., Шадрин В.Ю.</i> Равномерное разбиение сферы и его применение для вычисления коэффициентов облученности	198
<i>Слепцов С.Д., Савинова Н.А., Рубцов Н.А.</i> Численное моделирование однофазной задачи Стефана в полупрозрачной рассеивающей среде	200
<i>Солодуша С.В., Суслов К.В.</i> Математическая модель вентильно-реактивного двигателя на основе рядов Вольтерра	201
<i>Талтыкина М.Ю., Каширин А.А.</i> Мозаично-скелетонный метод в задачах Дирихле для уравнения Гельмгольца	202
<i>Чеботарев А.Ю., Гренкин Г.В.</i> Анализ задач свободной конвекции с радиационным теплообменом	204
<i>Четырбоцкий А.Н., Четырбоцкий В.А.</i> Проблемы численного моделирования морского ледяного покрова	206

<i>Шадрин В.Ю., Павлов Н.Н.</i> Об одном многосеточном методе расчета двумерных стационарных температурных полей наружных ограждающих конструкций с особенностями	209
<i>Шимелевич М.И.</i> Методы нейросетевой аппроксимации в нелинейных обратных задачах геофизики	210

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

**VII МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ**

Тезисы докладов

30 июня – 4 июля 2014 г.

Под редакцией д.ф.-м.н. И.Е. Егорова, д.ф.-м.н. Ф.М. Федорова
Оригинал-макет: ИП Чичигинарова М.В.

Подписано в печать 20.06.2014. Формат 60 × 84 1/16.
Печать офсетная. Печ. л. 14,0. Тираж 160 экз. Заказ №518

Отпечатано в ООО "Компания "Дани-Алмас"
Адрес: 677000 г. Якутск, ул. Билибина, 10А