МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА
Якутское отделение Регионального научно-образовательного математического центра
«Дальневосточный центр математических исследований»
Институт математики и информатики

IX Всероссийская студенческая олимпиада (ВСО) по математике с международным участием в 2023-2024 учебном году

Составители:
Попов Сергей Вячеславович
Лазарев Ньургун Петрович
Федотов Егор Дмитриевич
Верховцев Семен Дмитриевич

Якутск 2024г.

IX Всероссийская олимпиада студентов образовательных организаций высшего образования (ВСО) в 2023-2024 году

1. Вычислите предел

$$\lim_{t\to+\infty} t\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2+t^2}.$$

2. Дана функция $f(x)=19^x-13^x-3^{2x}+3^x$. Найдите все действительные корни уравнения $f(x)=0$.

3. Докажите, что для любой непрерывной неубывающей функции $g\,:\,[0,1]\to\mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2024}\int\limits_0^1 g(x)dx\leq\int\limits_0^1 x^{2023}g(x)dx.$$

Найдите функции, для которых будет выполняться равенство.

4. Вычислите интеграл

$$\int\limits_L \frac{z^2}{z^3-1}\,dz,$$

где L — простой замкнутый контур, удовлетворяющий равенству $|Rez|+|Imz|=1$.

5. Окружность ω_0 единичного радиуса касается обеих ветвей параболы $y^2=px, p>0$. На основе ω_0 строится последовательность окружностей ω_k таких, что ω_k касается внешним образом окружности ω_{k-1} и обеих ветвей параболы, либо вершины параболы. Найдите наименьшее значение n, при котором окружность ω_n коснется вершины параболы.

6. Выписали на доске все числа вида $\prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{m_i}$, в порядке возрастания, где p_i-различные фиксированные простые числа, $m_i\in\mathbb{Z}_{\geq0}$. Пусть $f_k(n)$–функция, возвращающая n-ое число на доске. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} f_k(n)^{n^{-1/k}}.$$

7. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{k}$–натуральные числа такие, что $1\leq a_i\leq N$. Кроме того, известно, что $\sum\limits_{i=1}^{k}\sqrt{a_i}$ не является целым числом. Обозначим через $\|x\|$ – расстояние до ближайшего целого числа. Докажите, что существует постоянная c_k, не зависящая от N, такая что

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i}\right\|\geq c_k\;N^{1/2-2^{k-1}}.$$

Решение задач

Решение задачи 1.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$
Справедливы неравенства

$$\frac{1}{(k+1)^2+t^2} \leq \int\limits_k^{k+1} \frac{dx}{x^2+t^2} \leq \frac{1}{k^2+t^2}.$$

Откуда получим

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+t^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+t^2} \leq \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+t^2}.$$

Откуда имеем

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right) \leq t\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+t^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Замечание

Задача весьма заковыристая, если сделаем следующий переход, внутри предела а именно

$$\lim_{t\to+\infty} t\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+t^2} \to \lim_{t\to+\infty} t \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2+t^2}.$$

То последнего двойного предела не существует, так как результат уже будет зависеть от «угла атаки».

На самом деле, мы можем явно посчитать бесконечную сумму. Для этого воспользуемся разложением Эйлера синуса в виде бесконечного произведения[1].

$$\sin(x) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} (x+k\pi).$$

Прологарифмировав его и взяв производную, мы получим следующее

$$(ln(\sin(x)))' = \operatorname{ctg}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+k\pi} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-k^2\pi^2}.$$

Тогда, подставив $\pi i x$ вместо x,

$$\operatorname{ctg}(\pi i x) = \frac{1}{\pi i x} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2ix}{x^2+k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+k^2} = \frac{i\pi x\operatorname{ctg}(i\pi x)-1}{2x^2}$$

Котангенс комплексного аргумента известен и равен $\operatorname{ctg}(i\pi x) = -i\operatorname{cth}(\pi x)$, где $\operatorname{cth}(x)$–гиперболический котангенс.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+k^2} = \frac{\pi x\operatorname{cth}(\pi x)-1}{2x^2}.$$

Критерии

[1] В. Г. Кановей, О корректности эйлерова метода разложения синуса в бесконечное произведение, УМН, 1988, том 43, выпуск 4, 57–81

- 2 балла – Сумма представлена как аналог интегральной суммы без обоснования
- 3 балла – Сумма представлена как аналог интегральной суммы с попытками обоснования (оценки равномерности и т.п.)
- 4 балла – Сумма представлена как аналог интегральной суммы, получен верный ответ с попытками обоснования (оценки равномерности и т.п.)
- 5 баллов – Без обоснования расписано значение суммы, получен верный ответ
- 7 баллов — Работа с интегральной суммой обоснована мажорирующими оценками, либо решение получено иным верным путём

Решение задачи 2.
Ответ: $x = 0$ и $x = 1$ других корней нет.

Легко видеть, что $x = 0$ является корнем уравнения $f(x) = 0$. Пусть $x \neq 0$, рассмотрим функцию $g(t) = t^x$. Используя теорему Лагранжа о конечных приращениях, имеем

$$g(19) - g(13) = (19 - 13)g'(t_1),\ g(9) - g(3) = (9 - 3)g'(t_2),\ t_1 \in [13, 19],\ t_2 \in [3, 9]$$

Если $x = x_0$ — решение $f(x) = 0$, то получим

$$6g'(t_1) = 6g'(t_2) \Rightarrow xt_1^{x-1} = xt_2^{x-1} \Rightarrow t_1^{x-1} = t_2^{x-1}$$

$$\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{x-1} = 1.$$

Так как $19 \geq t_1 > t_2 \geq 3$, получим $x = 1$.

Критерии

- 1 балл – указаны верные решения x=0 и x=1 без доказательства отсутствия иных решений
- 2 балла – указаны верные решения x=0 и x=1 и сделана попытка доказательства отсутствия иных решений с помощью, например, дифференциального исчисления.
- 5 баллов – указаны верные решения x=0 и x=1, неточные доказательства отсутствия иных решений.
- 6 баллов – мелкие недочёты, не повлекшие неверный ответ или неверную суть доказательства.
- 7 баллов – безошибочные решения, в том числе побочные.

Решение задачи 3.

Пусть $n = 2023$, $x_0 = \sqrt[n]{1/(n+1)}$. Так как $\int\limits_0^1 ((n+1)x^n - 1)g(x_0)dx = 0$, тогда имеем

$$\int_0^1 ((n+1)x^n - 1)g(x)dx = \int_0^1 ((n+1)x^n - 1)(g(x) - g(x_0))dx =$$

$$= \int_0^{x_0} ((n+1)x^n - 1)(g(x) - g(x_0))dx + \int_{x_0}^1 ((n+1)x^n - 1)(g(x) - g(x_0))dx.$$

Поскольку функция g неубывающая, то каждый интеграл в последней сумме неотрицателен. Следовательно,

$$\int_0^1 ((n+1)x^n - 1)g(x)dx \geq 0,$$

что эквивалентно искомому неравенству. Равенство же выполняется в случае когда $g(x) = c$, где c некоторое постоянное число. Доказать это можно следующим образом. Так как $((n+1)x^n - 1)(g(x) - g(x_0)) \geq 0$ при $x \in [0,1]$ то он дожен равняться нулю, откуда получим что для любого $x \in [0,1]$ $g(x) = g(x_0)$.

Критерии

- 7 баллов — полное верное решение
- 5 баллов — неравенство доказано только для дифференцируемых функций
- Минус 1 балл — приведены примеры функций, дающих равенство, без доказательства отсутствия иных таких функций
- Минус 2 балла — нет примеров функций, на которых достигается равенство
- Отнять от 0 до 2 баллов — за неточности в доказательстве.

Решение задачи 4.

Ответ: $\dfrac{i\pi}{6}$

Заметим, что квадрат $ABCD = \{z : |Rez| + |Imz| = 1\}$ с вершинами $A(-1;0)$, $B(0;1)$, $C(1;0)$, $D(0;-1)$ лежит внутри круга с радиусом 1 и с центром в точке $O(0;0)$, кроме вершин A, B, C и D.

Найдем нули знаменателя: $z_k = \sqrt[3]{1} = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}k\right)$, $k = 0, 1, 2$. Следовательно,

$$z^3 - 1 = (z-1)\left(z - \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(z - \exp\left(i\frac{4\pi}{3}\right)\right) = (z-1)(z-z_1)(z-z_2).$$

Разлагая подынтегральную функцию на элементарные дроби, получим

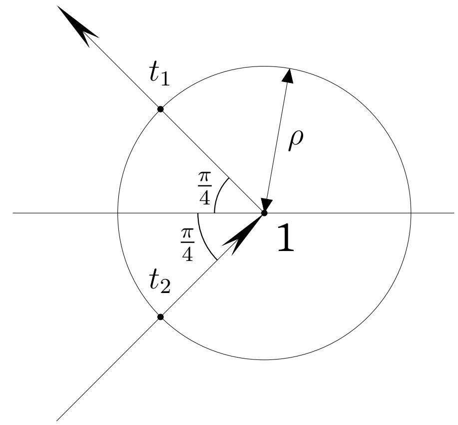
$$\frac{z^2}{z^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2}\right).$$

Так как z_1, z_2 лежат вне контура L, то сумма второго и третьего особых интегралов, равен

$$\frac{1}{3}\int_L \left(\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2}\right) dz = 0.$$

Найдем первый особый интеграл, в котором $1 \in L$. В этом случае искомый особый интеграл имеет смысл лишь в случае главного значения по Коши:

$$\int\limits_L \frac{dz}{z-1} = \lim_{\rho\to 0}\int\limits_{L\setminus l} \frac{dz}{z-1} = \lim_{\rho\to 0}\ln(z-1)\Big|_{t_2}^{t_1} = \lim_{\rho\to 0}\ln\frac{t_1-1}{t_2-1},$$



где l — часть контура L, которую вырезает окружность C_ρ радиуса ρ с центром в точке C, t_1, t_2— точки пересечения окружности C_ρ с L. Вспоминая направление контура, получим что $t_1 = \exp(3i\pi/4)\rho+1$ и $t_2 = \exp(i\pi/4)\rho + 1$. Итого

$$\lim_{\rho\to 0}\ln\frac{t_1-1}{t_2-1} = \lim_{\rho\to 0}\ln\frac{(i-1)\rho}{(i+1)\rho} = \ln i = \frac{i\pi}{2}.$$

Критерии

- 1 балл — правильно построен контур интегрирования
- 2 балла — правильно найдены и классифицированы все полюса где точка z=1 не является изолированной особой точкой
- 3-4 балла – функция разложена на простейшие дроби
- 5 баллов – верная формула Коши—Римана для контурных интегралов
- 6 баллов – есть небольшие ошибки при вычислениях

Решение задачи 5.

Ответ: $n = \lceil 1/p - 1/2\rceil$, где $\lceil x\rceil$ округление до ближайшего целого сверху.

Рассмотрим окружность ω_k. В силу симметрии параболы центр окружности будет иметь координаты $(x_k, 0)$, также обозначим ее радиус как r_k. Тогда

$$\begin{cases} y^2 = px \\ y^2 + (x-x_k)^2 = r_k^2 \end{cases} \Rightarrow px + (x-x_k)^2 = r_k^2.$$

Так как они касаются, то дискриминант должен равняться нулю, откуда получим, что

$$x_k = \frac{p^2 + 4r_k^2}{4p}.$$

Отдельно стоит рассмотреть случай, когда ω_k касается вершины параболы, так как в этом случае, дискриминант всегда больше нуля. Тогда $r_k = x_k$, откуда получим, что

$$px + (x-x_k)^2 = r_k^2 \;\Rightarrow\; x(x + (p-2r_k)) = 0,$$

так как мы требуем касания, то необходимо выполнение $r_k \le p/2$.

Также заметим, что $x_k - x_{k+1} = r_k + r_{k+1}$. Объединяя оба эти выражения получим $r_k - r_{k+1} = p$. Откуда при условии, что $r_0 = 1$ получим $r_k = 1 - kp$ при условии, что ω_k касается параболы в двух его ветвях.

Пусть n такое, что ω_n касается параболы в его вершине, а ω_{n-1} касается параболы в двух его ветвях, тогда $r_n \le p/2$. Тогда $r_{n-1} = 1 - (n-1)p > p/2$ откуда получаем, что $n < 1/p + 1/2$, или же $n = [1/p + 1/2]$ при условии что $1/p + 1/2$ не является целым, если оно все же целое то он будет равен $1/p - 1/2$. Откуда в более компактом виде его можно записать как $n = \lceil 1/p - 1/2 \rceil$, где $\lceil x \rceil$ округление до ближайшего целого сверху.

Критерии

- Плюс 1 балл: получено и обосновано равенство $x_k = (p^2 + 4r_k^2)/p$
- Плюс 3 балла: выведено $x(x + p - 2r_k) = 0$ или $r_k \le p/2$
- Плюс 1 балл: выведено $r_k - r_(k-1) = p$
- Плюс 1 балл: условие для $r_k = 1 - kp$
- Плюс 1 балл: решено неравенство для n относительно p
- Минус 1 балл, если округление произведено в неправильную сторону

Решение задачи 6.

Ответ: Искомый предел равен $\exp\left(\sqrt[k]{k!\prod\limits_{i=1}^{k} ln(p_i)}\right)$

Пусть для некоторого n, $f(n) = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{m_i}$. Прологарифмировав его получим $ln(f(n)) = \sum\limits_{i=1}^{k} ln(p_i)m_i$. Заметим, что оно является k-мерной гиперплоскостью относительно переменных m_i. Тогда, n будет равняться количеству целочисленных точек, удовлетворяющим следующим условиям

$$\sum_{i=1}^{k} m_i\, ln(p_i) \le ln(f(n)), \quad m_j \ge 0,\ j = 0, \ldots, k.$$

Так как нас интересует только поведение функции на бесконечности, то воспользуемся тем фактом что количество целых точек примерно равно его объему. В нашем случае это прямоугольный k-симплекс. Длины его ребер при "прямом" угле будут равны $ln(f(n))/ln(p_i)$. Тогда

$$n \sim V = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}\frac{ln(f(n))}{ln(p_i)}.$$

Откуда получим

$$ln(f(n)) \sim \sqrt[k]{k!\, n \prod_{i=1}^{k} ln(p_i)}.$$

Тогда искомый предел будет равен

$$\lim_{n\to\infty} f_k(n)^{n^{-1/k}} = \exp\left(\sqrt[k]{k!\prod_{i=1}^{k} ln(p_i)}\right).$$

Замечание

Данное решение выглядит весьма наивно, но так или иначе ответ верный. А теперь докажем его чуть более математически строго.

На самом деле несложно получить оценку снизу

$$n \geq \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{ln(f(n))}{ln(p_i)}\right]+1\right) > \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}\frac{ln(f(n))}{ln(p_i)}.$$

Нестрогое неравенство можно интерпретировать так: обрезаем симплекс до целочисленного, после достраиваем его до "прямоугольного параллелепипеда", считаем количество целых точек в нем и делим на $k!$.

Чтобы получить оценку сверху проведем следующее рассуждение. Обозначим все целочисленные точки лежащие внутри и на поверхности нашего симплекса через x_i, а также обозначим вектор $e = (1, \cdots, 1)$. Прикрепим к каждому x_i единичный куб, так чтобы точки x_i и $x_i + e$ являлись концами главной диагонали прикрепленного куба. Тогда

$$n = \text{Сумме объемов всех кубов прикрепленных к нашим точкам} \leq$$

$$\leq \text{Объем симплекса "катеты" которых равны } \frac{ln(f(n))}{ln(p_i)}\left(1+\sum_{j=1}^{k}\frac{ln(p_j)}{ln(f(n))}\right) =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{ln(f(n))}{ln(p_i)}\right)\left(1+\sum_{j=1}^{k}\frac{ln(p_j)}{ln(f(n))}\right)^k$$

Итого мы получим

$$\frac{1}{k!}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{ln(f(n))}{ln(p_i)}\right)\left(1+\sum_{j=1}^{k}\frac{ln(p_j)}{ln(f(n))}\right)^k \geq n > \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}\frac{ln(f(n))}{ln(p_i)}$$

Из которых мы получим двухстороннюю оценку для $f(n)$

$$\sqrt[k]{k!n\prod_{i=1}^{k} ln(p_i)} > ln(f(n)) \geq \sqrt[k]{k!n\prod_{i=1}^{k} ln(p_i)} - \sum_{j=1}^{k} ln(p_j),$$

что эквивалентно

$$\sqrt[k]{k!\prod_{i=1}^{k} ln(p_i)} > ln(f(n)^{n^{-1/k}}) \geq \sqrt[k]{k!\prod_{i=1}^{k} ln(p_i)} - \frac{1}{n^{1/k}}\sum_{j=1}^{k} ln(p_j),$$

откуда и вытекает наш ответ.

В действительности полученные оценки позволяют нам получить первый член разложения $ln(f_k(n))$ на бесконечности а именно

$$ln(f_k(n)) = \sqrt[k]{k!n\prod_{i=1}^{k} ln(p_i)} + O\left(\frac{\sqrt[k]{n}}{n}\right)$$

Оценка снизу весьма интересная(хоть и получена очень грубо), ведь если мы возьмем например бесконечную подпоследовательность простых чисел, а именно каждую 2^n-ую, и воспользовавшись тем что n-ое простое число ведет себя как $n\,ln(n)$ то несложно показать что

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!\prod_{i=1}^{k} ln(p_i)}\left(\sum_{j=1}^{k} ln(p_j)\right)^{-1} = \frac{2}{e^2}.$$

Откуда читателя может заинтересовать поведение $f(n)$ при бесконечном наборе простых, ведь если мы возьмем **все** простые числа, то очевидно что $f(n) = n$, а если убрать какое-то конечное число простых, то $f(n) \sim Cn$, где $C = \prod 1/(1 - p_i^{-1})$ и произведение идет по убранным простым числам. Улучшить оценку так чтобы она работала и при бесконечном наборе пока неудается, но надежду на существования такой оценки дает то что $ln(x) = \lim_{k\to\infty} k(\sqrt[k]{x} - 1)$.

Критерии

- 1 балл – Получен верный ответ при $k = 1$
- 1 балл – Идея подсчета которая может потенциально привести к ответу
- 3 балла – Получены сверху и снизу грубые оценки на искомый предел или есть идея подсчета количества целых чисел в соответствующем симплексе

Решение задачи 7.

Участниками было предложено следующее решение. Из условия задачи никак не следует, что c_k обязательно положительная постоянная. Поэтому $c_k = 0$ является вполне законным решением.

А теперь авторское решение, в котором предполагалось что $c_k > 0$.

Для начала докажем следующую лемму:

Определим многочлен

$$P_k(x) = \prod_{\sigma}\left(x - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{\sigma_i}\sqrt{a_i}\right)$$

где $\sigma_i \in \{0, 1\}$, и произведение идет по всем возможным наборам σ_i. Тогда для любых натуральных a_i, $P_k(x)$–многочлен с целыми коэффициентами.

Легко видеть, что при $k = 1$, $P_1(x) = x^2 - a_1$ является многочленом с целыми коэффициентами. Также заметим что $P_k(x) = P_{k-1}\left(x - \sqrt{a_k}\right) P_{k-1}\left(x + \sqrt{a_k}\right)$ верно для любого $k > 1$. И в силу того что многочлен $P_1(x)$ имеет ненулевые коэффициенты только при четных степенях, то тогда $P_k(x)$ также будет обладать этой особенностью. Далее докажем по индукции. Пусть $P_{k-1}(x)$ многочлен с целыми коэффициентами. Тогда

$$P_k(x) = P_{k-1}\left(x - \sqrt{a_k}\right) P_{k-1}\left(x + \sqrt{a_k}\right) = \sum_{n=0}^{2^{k-1}} b_n\left(x - \sqrt{a_k}\right)^n \sum_{m=0}^{2^{k-1}} b_m\left(x + \sqrt{a_k}\right)^m.$$

Рассмотрим следующую сумму, не теряя общности, скажем, что $n \leq m$.

$$(x - \sqrt{a_k})^n (x + \sqrt{a_k})^m + (x - \sqrt{a_k})^m (x + \sqrt{a_k})^n = (x^2 - a_k)^n \left((x + \sqrt{a_k})^{m-n} + (x - \sqrt{a_k})^{m-n}\right).$$

Так как m и n четные числа, то несложно убедиться, что последняя скобка будет многочленом с целыми коэффициентами, откуда и выходит что $P_k(x)$–многочлен с целыми коэффициентами.

Для дальнейшего продвижения нам также необходимо будет оценить коэффициенты данного многочлена. Пусть a_i удовлетворяют условиям задачи. Тогда все корни многочлена не будут превышать $k\sqrt{N}$ откуда по формулам Виета мы сможем оценить наши коэффициенты.

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{2^{k-1}} b_{2n} x^{2n}, \quad |b_{2n}| \leq b'_{2n} N^{2^{k-1}-n},$$

где b'_{2n} уже не зависят от a_i.

Пусть $\sum\limits_{i=1}^{k} \sqrt{a_i} = m + \epsilon$, где m–ближайшее целое число к $\sum\limits_{i=1}^{k} \sqrt{a_i}$, тогда $|\epsilon| \leq 1/2$, а также $m \leq k\sqrt{N} + 1/2$. Тогда

$$P_k(m+\epsilon) = \sum_{n=0}^{2^{k-1}} b_{2n} (m+\epsilon)^{2n} = \sum_{n=0}^{2^{k-1}} b_{2n} \left(m^{2n} + \epsilon\, q_n(m,\epsilon)\right) = P_k(m) + \epsilon \sum_{n=1}^{2^{k-1}} b_{2n} q_n(m,\epsilon) = 0.$$

Заметим, что $P_k(m)$ целое число, и $|P_k(m)| \geq 1$, иначе m был бы корнем данного многочлена. Также

$$\epsilon q_n(m,\epsilon) = (m+\epsilon)^{2n} - m^{2n} = \epsilon m^{2n-1} \left(2n + \sum_{i=1}^{2n} \frac{q_{i,n}}{m^i}\right) \leq q'_n N^{n-1/2} \epsilon.$$

Откуда получим, что

$$\left|\sum_{n=1}^{2^{k-1}} b_{2n} q_n(m,\epsilon)\right| \leq \sum_{n=1}^{2^{k-1}} |b_{2n} q_n(m,\epsilon)| \leq \sum_{n=1}^{2^{k-1}} b'_{2n} N^{2^{k-1}-n} q'_n N^{n-1/2} \leq c_0 N^{2^{k-1}-1/2}.$$

А теперь собрав вместе все оценки получим

$$|\epsilon| = \frac{|P_k(m)|}{\left|\sum\limits_{n=1}^{2^{k-1}} b_{2n} q_n(m,\epsilon)\right|} \geq \frac{1}{c_0 N^{2^{k-1}-1/2}} = c_1 N^{1/2-2^{k-1}}$$

Замечание

На самом деле мы доказали немного более общий случай, а именно то, что для любых натуральных $\{a_i\}_{i=1}^k$, таких что, $1 \leq a_i \leq N$ а также $\sum\limits_{i=1}^{k} (-1)^{\sigma_i} \sqrt{a_i}$ не является целым числом и $\sigma_i \in \{0,1\}$. Верна оценка

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} (-1)^{\sigma_i} \sqrt{a_i}\right\| \geq c\, N^{1/2-2^{k-1}},$$

где c не зависит от a_i.

Похожая постановка задачи встречается в работах[2][3] в которых они ищут насколько близко оно может быть к нулю. Ну а также наша задача является обобщением работы[4] а также оценка сверху

[2] Jianbo Qian and Cao An Wang. How much precision is needed to compare two sums of square roots of integers?. Information Processing Letters, 100(5):194–198, December 2005

[3] E.D. Demaine, J.S.B. Mitchell, J. O'Rourke, The open problems project, Problem 33: Sum of square roots, https://topp.openproblem.net/p33

[4] D. Angluin and S. Eisenstat, How close can $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ be to an integer?, Yale Technical Report 1279, 2004

для наименьшего его значения получена в перепринте[5]

Критерии

- 1 балл – доказано для случая $k = 1$
- 7 баллов – любое $c_k \leq 0$ с рассуждениями
- 6 баллов – любое $c_k \leq 0$ с огрехами в рассуждениях или без них

[5] S Steinerberger, Sums of square roots that are close to an integer, arXiv:2401.10152