

## IX Всероссийская олимпиада студентов образовательных организаций высшего образования (ВСО) в 2023-2024 году

1. Вычислите предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + t^2}.$$

2. Дана функция  $f(x) = 19^x - 13^x - 3^{2x} + 3^x$ . Найдите все действительные корни уравнения  $f(x) = 0$ .

3. Докажите, что для любой непрерывной неубывающей функции  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{2024} \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 x^{2023} g(x) dx.$$

Найдите функции, для которых будет выполняться равенство.

4. Вычислите интеграл

$$\int_L \frac{z^2}{z^3 - 1} dz,$$

где  $L$  — простой замкнутый контур, удовлетворяющий равенству  $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1$ .

5. Окружность  $\omega_0$  единичного радиуса касается обеих ветвей параболы  $y^2 = px$ ,  $p > 0$ . На основе  $\omega_0$  строится последовательность окружностей  $\omega_k$  таких, что  $\omega_k$  касается внешним образом окружности  $\omega_{k-1}$  и обеих ветвей параболы, либо вершины параболы. Найдите наименьшее значение  $n$ , при котором окружность  $\omega_n$  коснется вершины параболы.

6. Выписали на доске все числа вида  $\prod_{i=1}^k p_i^{m_i}$ , в порядке возрастания, где  $p_i$  — различные фиксированные простые числа,  $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Пусть  $f_k(n)$  — функция, возвращающая  $n$ -ое число на доске. Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_k(n)^{n^{-1/k}}.$$

7. Пусть  $\{a_i\}_{i=1}^k$  — натуральные числа такие, что  $1 \leq a_i \leq N$ . Кроме того, известно, что  $\sum_{i=1}^k \sqrt{a_i}$  не является целым числом. Обозначим через  $\|x\|$  — расстояние до ближайшего целого числа. Докажите, что существует постоянная  $c_k$ , не зависящая от  $N$ , такая что

$$\left\| \sum_{i=1}^k \sqrt{a_i} \right\| \geq c_k N^{1/2 - 2^{k-1}}.$$